Afleiðslukerfi frá Evklíð til Hilberts

Hið mikla stærðfræðirit Evklíðs, *Frumþættir* (eða *Stóíkeia* eins og bókin heitir á grísku) setur stærðfræði fram sem afleiðslukerfi. Það hefst á 10 frumsetningum sem allar aðrar setningar eru leiddar af.

Fimm fyrstu frumsetningarnar eru almennar og varða alla stærðfræði en þær fimm seinni fjalla um rúmfræðina sérstaklega.

Almennu frumsetningarnar eru:

1. Séu tveir hlutir báðir jafnir þriðja hlut þá eru þeir líka jafnir hvor öðrum.
2. Sé jafnmiklu bætt við tvo jafna hluti verða útkomurnar jafnar.
3. Sé jafnmikið tekið af tveim jöfnum hlutum verða útkomurnar jafnar.
4. Hlutir sem fylla sama rúm eru jafnir.
5. Heild er stærri en hluti hennar.

Rúmfræðilegu frumsetningarnar eru:

1. Frá hvaða punkti sem er má draga beina línu í hvaða punkt sem er.
2. Strik af endanlegri lengd má framlengja í beina línu.
3. Hægt er að draga hring með hvaða fjarlægð sem er fyrir radíus og hvaða punkt sem er fyrir miðju.
4. Öll rétt horn eru jafn stór.
5. Ef strik sker tvær línur og innri hornin á aðra hlið þess eru samtals minni en tvö rétt horn þá skerast línurnar tvær þeim megin við strikið ef þær eru framlengdar ótakmarkað.

Stærðfræðilegar sannanir verða að byggja á einhverjum forsendum. Þær forsendur kunna að vera niðurstöður annarra sannana sem byggja þá á einhverjum öðrum forsendum og þannig koll af kolli. En þetta getur ekki rakið sig endalaust. Undirstaða sérhvers afleiðslukerfis hlýtur að vera ósannaðar setningar sem gengið er að sem vísum. Slíkar setningar eru kallaðar *frumsetningar*. (Í mörgum Evrópumálum er gríska orðið *axiom* notað um þær.)

Helstu einkenni vel heppnaðra afleiðslukerfa eru:

i. Kerfið er sjálfu sé samkvæmt, þ.e. ekki er hægt að leiða mótsögn af frumsetningunum.
ii. Frumsetningarnar eru óháðar hver annarri, þ.e. ekki er hægt að leiða neina þeirra af hinum (enda er þá óþarfi að hafa hana fyrir frumsetningu).
iii. Frumsetningarnar duga til að leiða út merkilegar niðurstöður.
iv. Byrjað er á að tilgreina *allar* frumsetningar (eða ósannaðar staðhæfingar) sem notaðar verða.

Fyrsta skilyrðið er það mikilvægasta því sé hægt að leiða út mótsögn þá er hægt að fá út hvaða vitleysu sem er. En þótt þetta skilyrði sé mikilvægt er mjög erfitt að sannprófa hvort það er uppfyllt. Aðferðir til að sannprófa að afleiðslukerfi sé sjálfu sér samkvæmt tóku ekki að þróast ekki fyrr en undir lok 19. aldar.

Af mótsögn er hægt að leiða hvað sem er

Mótsögn er setning á forminu p og ekki p (þ.e. fullyrðing um að eitthvað bæði sé satt og sé ekki satt). Af setningu á þessu formi er hægt að leiða hvaða vitleysu sem er t.d. að krókódílar séu spendýr.

Í rökfærslunni hér á eftir eru aðeins notaðar afleiðslureglurnar

a) Af (p og q) leiðir p.
b) Af (p og q) leiðir q.
c) Af p leiðir (p eða q).
d) Af (p eða q) og (ekki p) leiðir q.

Hér er rökfærslan:

1.	p og ekki p	Forsenda.
2.	p	Leiðir af forsendunni í línu 1 skv. reglu a.
3.	p eða krókódílar eru spendýr.	Leiðir af línu 2 skv. reglu c.
4.	ekki p	Leiðir af forsendunni í línu 1 skv. reglu b.
5.	Krókódílar eru spendýr .	Leiðir af 3. og 4. línu skv. reglu d.

Fyrr á öldum höfðu stærðfræðingar ekki áhyggjur af þeim möguleika að kerfi Evklíðs gæti verið ósamkvæmt og leitt af sér mótsögn. Menn litu svo á að frumsetningar hans væru augljóslega sannar, og sannar setningar geta vitaskuld ekki verið í mótsögn hver við aðra. Hins vegar veltu margir því fyrir sér hvort kerfi Evklíðs uppfyllti annað skilyrðið, þ.e. hvort frumsetningarnar væru óháðar hver annarri, einkum því hvort hægt væri að leiða fimmtu rúmfræðilegu frumsetninguna af hinum. Þetta reyndu margir að gera og af þeim tilraunum er mikil saga. Skemmst er frá því að segja að þetta reyndist ómögulegt og nú vita menn að hinar fimm rúmfræðilegu frumsetningar Evklíðs eru óháðar hver annarri.

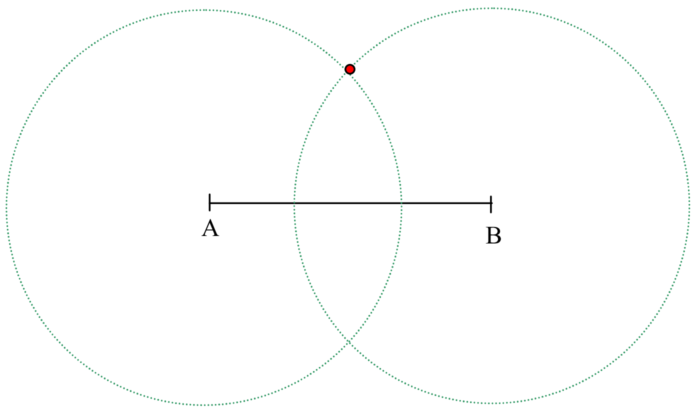
Um þriðja skilyrðið þarf ekki að hafa mörg orð þegar kerfi Evklíðs er annars vegar. Setningarnar sem hann leiddi út eru hver annarri merkilegri.

En hvað með fjórða skilyrðið, skyldi Evklíð hafa láðst að nefna einhverjar forsendur sem hann notar til að sanna rúmfræðisetningarnar í *Frumþáttunum*? Fram á 19. öld var rit Evklíðs nánast álitið hafið yfir alla gangrýni. Það þótti til slíkrar fyrirmyndar hvað varðar röklega byggingu og skipulega framsetningu að fáum datt í hug sá möguleiki að gloppur væru í rökum Evklíðs. En svo bregðast krosstré sem önnur tré.

Um aldamótin 1900 var þjóðverjinn *David Hilbert* (1862-1943) frægastur allra stærðfræðinga. Hann hafði ekki bara áhuga á að rannsaka mengi, tölur, föll og ferla og önnur efni sem stærðfræðingar höfðu fengist við heldur velti hann líka fyrir sér eðli stærðfræðinnar og röklegum undirstöðum hennar.

Hilbert og ýmsir samtímamenn hans gerðu strangari kröfur til stærðfræðilegrar röksemdafærslu en áður höfðu þekkst og sannanir Evklíðs uppfylltu þessar kröfur ekki að öllu leyti. Hilbert benti meðal annars á að þegar í sönnuninni á fyrstu setningu *Frumþáttanna* notaði Evklíð fleiri forsendur en frumsetningarnar sem taldar voru upp á undan.

Þessi fyrsta setning Evklíðs segir að sé gefið strik (eins og AB á myndinni) megi byggja jafnarma þríhyrning ofan á það með því að draga tvo jafnstóra hringi með endapunkta striksins fyrir miðjur og draga svo línur frá endum striksins í annan



skurðpunkt hringjanna.

Vissulega leiðir af frumsetningum Evklíðs að hægt sé að draga tvo jafnstóra hringi með A og B fyrir miðjur. En Hilbert benti á að það leiðir ekki af þessum frumsetningum að hringir eins og þeir sem hér eru sýndir hafi skurðpunkt. Til að leiða út þessa fyrstu setningu Evklíðs þarf því að nota forsendu sem segir að punktar liggi þétt á hringferli þannig að ef hringur er að hluta utan annars hrings og að hluta innan hans þá eigi þeir einhvern punkt sameiginlegan. Ástæðan fyrir því að Evklíð láðist að taka þetta fram er sjálfsagt sú hversu algerlega augljóst þetta er. En vel byggt afleiðslukerfi á að nefna allar forsendur sem notaðar eru, sama hversu einfaldar, augljósar og ómerkilegar þær eru.

Hilbert benti á fleiri forsendur sem Evklíð notar án þess að nefna þær, eins og t.d. þá að ef þrír ólíkir punktar liggja á sömu línu þá sé einn þeirra á milli hinna tveggja.

Hilbert setti fram nýtt frumsetningakerfi fyrir evklíðska rúmfræði árið 1899. Frumsetningarnar í kerfi hans voru 20 talsins. Það segir sína sögu um snilli Evklíðs að það skuli hafa liðið meira en 2.200 ár þar rituð var fullkomnari framsetning en hans á afleiðslukerfi fyrir rúmfræði.

Þótt Hilbert hafi gagnrýnt kerfi Evklíðs áttu hans eigin hugmyndir um stærðfræði að mörgu leyti ættir að rekja til *Frumþáttanna*. Í stuttu máli sagt voru þessar hugmyndir á þá leið að hægt væri að orða frumsetningar allrar stærðfræði á formlegu táknmáli (þ.e. máli með endanlegum orðaforða og nákvæmum reglum um hvernig orð og tákn mynda setningar) og setja fram strangar rökfræðireglur um hvernig leiða má öll stærðfræðileg sannindi af þeim. Hilbert áleit að þannig væri hægt að binda stærðfræðina í afleiðslukerfi sem væri í senn *sjálfu sér samkvæmt*, *fullkomið*, og *ákvarðanlegt*.

✓ Þegar hefur verið skýrt hvað það merkir að kerfi sé *sjálfu sér samkvæmt*, þ.e. að það geti aldrei gerst að tvær setningar sem leiddar eru af frumsetningunum stangist á þannig að önnur neiti hinni.
✓ Að kerfið sé *fullkomið* merkir að hægt sé að leiða allar sannar stærðfræðisetningar af frumsetningunum, þ.e. að það verði engin stærðfræðileg sannindi út undan.
✓ Að kerfið sé *ákvarðanlegt* þýðir að til sé algrím (þ.e. endanleg, örugg og ótvíræð aðferð) til að komast að því hvort setning sé afleiðing af frumsetningunum.

Þessar hugmyndir Hilberts voru í dúr við skoðanir flestra stærðfræðinga. Þeir litu á fræði sín sem formlegt kerfi þar sem öll sannindi væru leidd með ströngum rökfærslum af fáeinum grundvallarreglum eða frumsetningum.

Í byrjun þessarar aldar bjuggust flestir við að draumar Hilberts rættust senn og til yrði formlegt afleiðslukerfi fyrir alla stærðfræði. En árið 1931 sannaði austurríski stærðfræðingurinn *Kurt Gödel* (1906-1978) að ómögulegt sé að kerfisbinda talnafræði (þá grein stærðfræðinnar sem fjallar um heilar tölur) með þeim hætti sem Hilbert hugsaði sér.

Með *sönnun Gödels* var sýnt fram á að ómögulegt sé að búa til frumsetningakerfi fyrir talnafræði sem sé *í senn fullkomið og sjálfu sér samkvæmt*. Þar sem nauðsynlegt er að gera þá kröfu að slík kerfi séu sjálfum sér samkvæm þýðir þetta í raun að útilokað sé að setja fram frumsetningar sem dugi til að leiða út allar sannar stærðfræðilegar setningar um heilar tölur.

Nú kann einhverjum að detta í hug að það sé þá bara hægt að bæta við fleiri frumsetningum þar til komnar eru nægar forsendur til að leiða út alla stærðfræði. En sönnun Gödels útilokar að það sé hægt, hún tekur af öll tvímæli um að það er alveg sama hvað frumsetningarnar eru margar alltaf verða einhver stærðfræðileg sannindi út undan.

Ef draumar Hilberts hefðu ræst þá væri stærðfræðilegum rannsóknum að vissu leyti lokið, því það þyrfti ekki lengur hugmyndaflug og sköpunargáfu til að komast að því hvort stærðfræðileg fullyrðing sé sönn eða ósönn, það væri hægt að láta tölvu framkvæma algrímið sem sker úr um hvort setning er afleiðing af frumsetningunum eða ekki. Sönnun Gödels útilokar að vísu ekki að slíkt algrím sé til. Hún útilokar aðeins að stærðfræðilegt kerfi gæti verið *fullkomið* en eftir að hún var komin fram var það enn opin spurning hvort það gæti verið *ákvarðanlegt*. Kerfi sem er *ákvarðanlegt* en *ekki fullkomið* er þannig að til er algrím til að skera úr um hvort setning er afleiðing af frumsetningunum en þar sem sumar sannar setningar eru ekki afleiðing af frumsetningunum dugar ákvörðunaraðferðin ekki til að skera úr um það í öllum tilvikum hvort setning sé sönn, aðeins hvort hún sé sannanleg.

Það verkefni að finna slíka ákvörðunaraðferð kallaði Hilbert *das Entscheidungs-problem*. Árið 1936 sannaði enski stærðfræðingurinn Alan Turing (1912-1954) að þetta vandamál sé óleysanlegt, þ.e. að ekki sé mögulegt að búa til ákvörðunaraðferð af því tagi sem Hilbert hafði talað um.

Uppgötvanir Turings og Gödels sem hér hefur verið sagt frá eru með merkustu vísindaafrekum 20. aldar. Með þeim varð að engu draumurinn um að setja alla stærðfræði fram sem *sjálfu sér samkvæmt*, *fullkomið* og *ákvarðanlegt* kerfi eins og Hilbert hafði hugsað sér. Afleiðslukerfi eins og það sem Evklíð setti fram fyrir rúmfræðina og Hilbert endurbætti getur ekki fangað allan sannleika um stærðfræðileg efni.

Hinar 20 rúmfræðilegu frumsetningar Hilberts duga að vísu til að leiða út allar setningar í *Frumþáttum* Evklíðs en því fer fjarri að þær dugi til að leiða út öll rúmfræðileg sannindi. Þegar í fornöld voru mönnum t.d. kunnar reglur um keilusnið sem ekki verða leiddar af þeim.

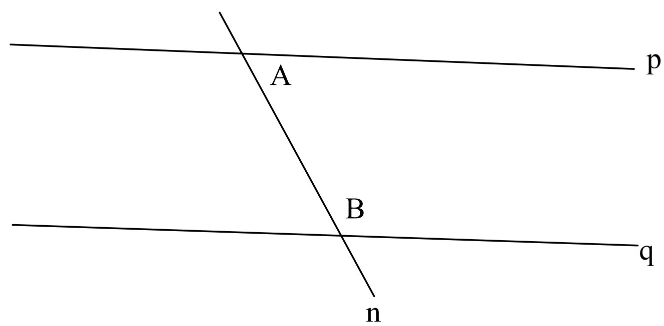
Að mestu byggt á:
A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics,* Whasington DC 1964.
L. B. Blumenthal: *A Modern View of Geometry*. New York 1980.
E. Nagel og J. R. Newmann: *Gödel's Proof* , New York 1958.

Fimmta frumsetningin og upphaf óevklíðskrar rúmfræði

Hinar fimm rúmfræðilegu frumsetningar í *Frumþáttum* Evklíðs eru:

1. Frá hvaða punkti sem er má draga beina línu í hvaða punkt sem er.
2. Strik af endanlegri lengd má framlengja í beina línu.
3. Hægt er að draga hring með hvaða fjarlægð sem er fyrir radíus og hvaða punkt sem er fyrir miðju.
4. Öll rétt horn eru jafn stór.
5. Ef strik sker tvær línur og innri hornin á aðra hlið þess eru samtals minni en tvö rétt horn þá skerast línurnar tvær þeim megin við strikið ef þær eru framlengdar ótakmarkað.

Sú fimmta sker sig úr því hún er langtum lengri og flóknari en hinar. Ef hún er heimfærð upp á myndina hér fyrir neðan þýðir hún að ef A + B < 180° þá skerist línurnar p og q hægra megin við strikið n ef þær eru framlengdar nógu langt.



Þessi frumsetning er engan veginn eins augljós og hinar fjórar. Hvað ef A + B eru næstum 180° en ekki alveg, þá gæti skurðpunktur línanna verið í trilljón kílómetra farlægð. Hvað ef alheimurinn er ekki svo stór? Og hvað ef geimurinn er með einhverjum þeim ósköpum að fjarlægð milli samsíða lína eykst eða minnkar á einhverjum stöðum í honum?

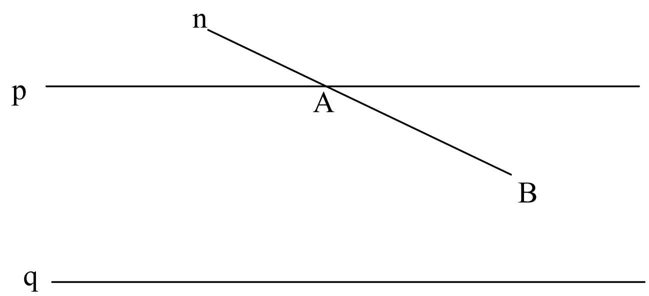
Ekki vitum við hvort svona efasemdir sóttu á Evklíð. En af einhverjum ástæðum frestaði hann því í lengstu lög að nota fimmtu frumsetninguna og 28 fyrstu setningar *Frumþáttanna* eru sannaðar án þess að hún komi við sögu þótt sumar þeirra hefði verið auðveldara að sanna með því að nota hana.

Engar heimildir eru um að fornir stærðfræðingar hafi efast um að fimmta frumsetningin sé sönn. Hins vegar efuðust ýmsir um að hún ætti að vera frumsetning og reyndu að leiða hana af hinum fjórum eða af þeim og öðrum ámóta einföldum og augljósum forsendum. Ein merkileg tilraun í þessa veru var gerð af stærðfræðingi sem hét Proclus (410-485 e. Kr.). Proclus tókst að sanna að hægt sé að leiða fimmtu frumsetninguna af hinum fjórum og forsendunni:

P: Ef p og q eru samsíða línur og línan n sker p þá sker n líka q.

Hann taldi sig líka geta leitt P af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og áleit sig þar með hafa sannað að fimmta frumsetningin sé ekki óháð hinum og ætti því ekki að vera frumsetning heldur sönnuð setning. Rök Proclusar voru á þessa leið:

Drögum samsíða línur p og q. Mörkum punkt A á p og punkt B milli p og q og drögum strik n gegnum A og B. Það er sama hvaða fjarlægð, f, er tiltekin, hægt er að framlengja strikið n í stefnuna frá A til B þannig að fjarlægðin milli p og enda þess verði meiri en f. Þar með getur fjarlægðin milli p og enda striksins orðið meiri en bilið milli p og q og þá hlýtur n að skera q.



Í þessari rökfærslu Proclusar er falin forsenda sem ekki verður leidd af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs, nefnilega að það sé fast bil milli p og q. Ef þetta bil eykst sem fjær dregur punktinum A er alls óvíst að strikið n nái nokkurn tíma að brúa það allt.

Það sem Proclusi tókst í raun og veru að sanna er ekki að fimmta frumsetningin sé afleiðing af hinum fjórum heldur að hún sé jafngild setningunni:

5_P: Milli tveggja samsíða lína er alls staðar sama bil.

Samsíða línur merkir hér línur sem skerast ekki þótt þær séu framlendar ótakmarkað í báðar áttir.

Þegar sagt er að 5_P sé jafngild fimmtu frumsetningu Evklíðs (sem við getum kallað 5_E) er átt við að:

Af fyrstu fjórum frumsetningunum og 5_P sé hægt að leiða 5_E og
Af fyrstu fjórum frumsetningunum og 5_E sé hægt að leiða 5_P.

Þetta þýðir að það mundi engu breyta um hvað hægt er að sanna og hvað ekki þó skipt væri á 5_E og 5_P.

Síðan Proclus var og hét hafa stærðfræðingar uppgötvað margar aðrar setningar sem eru jafngildar 5. frumsetningu Evklíðs. Hér eru nokkrar af þeim frægustu ásamt nöfnum höfunda sinna.

Proclus:	Milli tveggja samsíða lína er alls staðar sama bil.
Sacceri og Laplace	Til eru tveir misstórir þríhyrningar með jafnstór horn.
Playfair	Sé gefin lína l og punktur P sem er ekki á línunni þá er aðeins hægt að draga eina línu gegnum P samsíða línunni l.
Legendre	Til er þríhyrningur sem hefur hornasummuna 180°.
Gauss	Fyrir sérhverja tölu k>0 er til þríhyrningur sem hefur meira flatarmál en k.
Bolyai	Séu gefnir þrír punktar sem ekki liggja á beinni línu þá er til hringur gegnum þá alla.

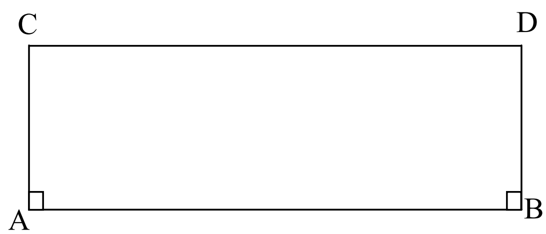
Einhver merkilegasta tilraunin til að sanna fimmtu frumsetningu Evklíðs var gerð af ítalska prestinum Girolamo Saccheri (1667-1733). Aðferð hans var í stuttu máli sú að rannsaka hvaða afleiðingar það hefði að neita henni. Saccheri taldi að með því að leiða setningar með ströngum og pottþéttum rökum af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og neitun þeirrar fimmtu mundi hann fá fram mótsögn og þar með geta sannað að neitun fimmtu frumsetningarinnar stangist á við hinar fjórar og hún sé því rökleg afleiðing af þeim.

Rökfræðilega er ekkert við þessa aðferð Saccheris að athuga. Ef við vitum að $F_1, F_2, \ldots F_n$ eru sannar forsendur og sýnum fram á að af þeim og *ekki P* leiði mótsögn þá höfum við þar með sýnt fram á að P er sönn setning og rökleg afleiðing af forsendunum $F_1, F_2, \ldots F_n$.

En Saccheri fann enga mótsögn. Setningarnar sem hann leiddi af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og neitun þeirrar fimmtu voru kannski undarlegar og ósennilegar og andstæðar rúmskynjun venjulegra manna en þær voru ekki mótsagnakenndar, engar tvær þeirra stönguðust á. Það sem Saccheri fann í raun og veru var því ekki sönnun á fimmtu frumsetningunni heldur ný rúmfræði sem er öðru vísi en rúmfræði Evklíðs. Hann hafnaði þessari rúmfræði raunar og sagði að hún væri andstæð eðli hinnar beinu línu.

Rit Saccheris um þetta efni heitir því langa nafni *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia* og kom út árið sem hann lést, 1733. Í rökfæslum sínum notar Saccheri ferhyrning sem er byggður eins og hér er lýst:

Byrjað er á að draga strikið AB. Á enda þess eru dregin tvö jafnlöng strik AC og BD hornrétt á það og endar þeirra tengdir með beinni línu CD.



Saccheri gat sannað að það leiðir af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs að hornin C og D eru jafnstór. Það eru því þrír möguleikar:

1. C og D gætu verið hvöss horn (þ.e. minni en rétt horn).
2. C og D gætu verið rétt horn.
3. C og D gætu verið gleið horn (þ.e. stærri en rétt horn).

Saccheri gat sannað að þriðja tilgátan stangast á við þá forsendu að bein lína hafi óendanlega lengd. Önnur frumsetning Evklíðs segir að strik af endanlegri lengd megi framlengja í beina línu. Þetta túlkaði Saccheri svo að bein lína sé óendanlega löng og miðað við þá túlkun stangast þriðja tilgátan á við aðra frumsetningu Evklíðs. Sé frumsetning númer tvö hins vegar aðeins skilin svo að það sé sama hversu langt hafi verið farið eftir línu það megi alltaf halda áfram þá útilokar hún ekki að lína sé eins og hringur með endanlega stærð án þess að nokkurs staðar sé endapunktur.

Saccheri gat líka sannað að fimmta frumsetning Evklíðs er afleiðing af annarri tilgátunni. Hann reyndi að hrekja fyrstu tilgátuna með því að leiða af henni mótsögn. Eins og nefnt hefur verið tókst það ekki en hefði það tekist þá hefði aðeins önnur tilgátan komið til greina (að því gefnu að við álítum að önnur frumsetningin kveði á um að lína sé óendanlega löng) og þar með hefði fimmta frumsetningin verið sönnuð því hún er afleiðing af því að C og D séu rétt horn.

Nú vita menn að það er ekki hægt að leiða mótsögn af fyrstu fjórum frumsetningum Evklíðs og fyrstu tilgátu Saccheris. Sú rúmfræði sem fæst með því að gera ráð fyrir fyrstu tilgátunni er kölluð hyperbólsk rúmfræði. Í hyperbólskri rúmfræði er hornasumma þríhyrnings minna en tvö rétt horn og því minni því stærri sem þríhyrningurinn er. Í slíkri rúmfræði er líka hægt að dragar margar línur samsíða gefinni línu gegnum sama punkt.

Eigi að nota þriðju tilgátu Saccheris verður að hafna því að lína hafi óendanlega lengd. Sú rúmfræði sem þá fæst kallast elliptísk rúmfræði. Í henni er hornasumma þríhyrnings meiri en tvö rétt horn og því meiri því stærri sem þríhyrningurinn er. Í slíkri rúmfræði eru engar tvær línur samsíða.

Hyperbólsk rúmfræði og elliptísk rúmfræði kallast einu nafni óevklíðsk rúmfræði. Rúmfræði sem gerir ráð fyrir annarri tilgátu Saccheris eða fimmtu frumsetningu Evklíðs kallast hins vegar evklíðsk rúmfræði. Rúmfræði sem ekki gerir ráð fyrir neinu af þessu er hlutlaus. Þar sem fyrstu 28 setningarnar í *Frumþáttum* Evklíðs eru aðeins leiddar af frumsetningum númer 1 til 4 en styðjast ekki við fimmtu frumsetninguna tilheyra þær hlutlausri rúmfræði.

Þótt Saccheri hafi stigið fyrstu skrefin í rannsóknum á óevklíðskri rúmfræði þá vakti það eitt fyrir honum að hrekja hana. Það var ekki fyrr en á fyrri hluta 19. aldar að stærðfræðingar tóku að rannsaka óevklíðska rúmfræði með opnum huga og gera sér skipulega grein fyrir eiginleikum hennar. Helstu frumkvöðlar á þessu sviði voru Þjóðverjinn Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Rússinn Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856) og Ungverjinn János Bolyaí (1802-1860).

Gauss er iðulega talinn ásamt Arkimedesi og örfáum öðrum í hópi mestu stærðfræðinga allra tíma. Hann varð fyrstur þessara þremenninga til að rannsaka eiginleika óevklíðskrar rúmfræði en hann birti niðurstöður sínar ekki á prenti og rit hans um þetta efni komu ekki út fyrr en eftir miðja 19. öld. Lobachevski varð fyrstur þessara þremenninga til að birta niðurstöður sínar. Rit hans um óevklíðska rúmfræði kom út árið 1829. Bolyaí birti kenningar sínar árið 1833 í 26 blaðsíðan eftirmála við bók um rúmfræði eftir föður sinn Wolfgang Bolyaí.

Allir þessir þremenningar fengust við hyperbólska rúmfræði og þeir mótuðu hugmyndir sínar óháð hver öðrum á árunum milli 1820 og 1830. Elliptísk rúmfræði þróaðist nokkru síðar. Helsti frumkvöðull hennar var Þjóðverjinn George Riemann (1826-1866).

Í upphafi höfðu frumkvöðlar óevklíðskrar rúmfræði nokkrar áhyggjur af því að hún kynni að fela í sé mótsagnir þótt ekki hefði tekist á leiða þær í ljós. Ekki leið þó á löngu áður en sýnt var fram á að óevklíðsk rúmfræði er laus við mótsagnir ef evklíðsk rúmfræði er það. Þetta var gert með því að smíða líkön af óevklíðskri rúmfræði innan evklíðskrar rúmfræði. Gerð slíks líkans er í því fólgin að túlka óskilgreindu hugtökin í frumsetningunum þannig að þær verði sannar um einhvern hluta evklíðskrar rúmfræði.

Ef orðið *lína* merkir *stórbaugur á yfirborði kúlu* (þ.e. hringur sem skiptir yfirborði kúlu í tvo jafnstóra helminga) og *punktur* merkir *punktur á yfirborði kúlu* þá verða allar setningar elliptískrar rúmfræði sannar um kúlu í evklíðsku rúmi. Það er t.d. satt að engir tveir stórbaugar á kúlu séu samsíða, tveir slíkir baugar hljóta að skerast. Það er líka satt að hornasumma þríhyrnings á kúlu sé meira en 180°.

Það er ögn flóknara mál að búa til svona líkan fyrir hyperbólska rúmfræði en það er hægt.

Dálítil rökfræði

Sú aðferð til sanna samkvæmni sem hér var nefnd byggist á því að röklegar afleiðingar frumsetninganna eru óháðar því hvað óskilgreind orð eins og punktur og lína merkja. Í stað þeirra mætti eins setja merkingarlaus tákn á borð við p og l. Þetta er vel þekkt úr einfaldri rökfræði. Gildi eftirfarandi rökfærslu er t.d. algerlega óháð því hvað orðin vúbb og strúldur þýða:

Forsenda 1: Ef vúbbið er komið þá er mikið strúldur.
Forsenda 2: Það er ekkert strúldur.

Niðurstaða: Vúbbið er ekki komið.

Líkön af óevklíðskri rúmfræði sem menn nota bæði til að gera sér hugmyndir um hana (eftir því sem það er mögulegt) og til að staðfesta að hún sé laus við mótsagnir túlka línur yfirleitt sem sveigðan feril (eins og t.d. stórbaug á kúlu). Það er því oft talað um að rúmið sem evklíðsk rúmfræði lýsir sé flatt en elliptísk og hyperbólsk rúmfræði fjalli um sveigt rúm.

Uppgötvanir Gauss, Bolyaí og Lobachevski á óevklíðskri rúmfræði eru með merkustu vísindaafrekum 19. aldar. Með þeim urðu þáttaskil í vísindasögunni því menn fóru í auknum mæli að rannsaka möguleika sem ekki er hægt að sjá fyrir sér eða gera sér myndir af í huganum. Mannlegt ímyndunarafl var ekki lengur mælikvarði á hvað gæti verið til og hvað ekki. Með þessu var brautin ekki aðeins rudd fyrir framfarir í hreinni stærðfræði heldur líka þær tvær byltingar sem mótað hafa eðlisfræði og heimsmynd 20. aldar: skammtafræðina og afstæðiskenninguna.

Skammtafræðin fjallar um hinar smæstu einingar efnisins og nýlegar kenningar á því sviði gera ráð fyrir að innan atómkjarna gildi önnur rúmfræði en sú sem kennd er við Evklíð. Afstæðiskenningin er meðal annars notuð til að rannsaka óravíddir geimsins og hún kveður á um að þungir hlutir valdi sveigju í rúminu og frumsetningar Evklíðs séu því ekki sannar um þann himingeim sem við sjáum hvelfast yfir okkur á stjörnubjartri nótt. Ekki er þó vitað með neinni vissu hvort rúmið er aðeins sveigt við þunga hluti og svarthol en flatt í stórum dráttum eins og evklíðsk rúmfræði gerir ráð fyrir eða hvort það er í aðalatriðum sveigt á annan hvorn veginn. Hver sem endanlegur sannleikur er um þetta efni þá er svo mikið víst að óevklíðsk rúmfræði er ekki bara leikfang stærðfræðinga heldur óaðskiljanlegur hluti af heimsmynd vísindanna.

Að mestu byggt á:
A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics,* Whasington DC 1964.
L. B. Blumenthal: *A Modern View of Geometry*. New York 1980.
L. Sklar: *Space, Time, and Spacetime*, Los Angeles 1974.

Stærðfræði í Grikklandi til forna

Gullöld grískra vísinda og lista hófst á 6. öld fyrir okkar tímatal og þá varð stærðfræði til sem sjálfstæð vísindagrein. Löngu fyrr höfðu Egyptar, Babylónímenn og fleiri fornþjóðir notað talnareikning í viðskiptum og stuðst við rúmfræðilega útreikninga við landmælingar, stjörnuathuganir og mannvirkjagerð.

Í ritum sagnfræðingsins Heródóts (484-425 f. Kr.) segir að Þales frá Miletos (um 600 f. Kr.) sé upphafsmaður grískrar stærðfræði. Þales er hálfgerð þjóðsagnapersóna og um hann er fátt vitað með vissu. Þó má telja nokkuð víst að um hans daga hafi grískir spekingar byrjað að beita þeim aðferðum sem síðan hafa einkennt stærðfræðileg vísindi. Megineinkenni þessara aðferða eru að:

- ✓ Reglur eru *sannaðar* með því að leiða þær af forsendum sem annað hvort eru augljósar eða hafa áður verið sannaðar.
- ✓ Við sannanir og útleiðslur er beitt strangri rökfærslu. Það dugar ekki að benda á einstök dæmi eða sýna fram á að regla sé sennileg.

Til að skýra muninn á grískri stærðfræði og reikningskunnáttu annarra fornþjóða má taka Pyþagórasarreglu sem dæmi. Egyptar og Babyloníumenn vissu það löngu fyrir daga grískrar stærðfræði að ef rétthyrndur þríhyrningur hefur skammhliðar sem eru 3 og 4 lengdareiningar þá er langhliðin 5 lengdareiningar. Þeir virðast einnig hafa gert sér grein fyrir þeirri almennu reglu að séu a og b skammhliðar og c langhlið í rétthyrndum þríhyrningi þá sé $a^2 + b^2 = c^2$. En í egypskum og babylónískum heimildum sjást engin merki þess að reynt hafi verið að rökstyðja regluna öðru vísi en með einstökum dæmum og mælingum á þríhyrningum. Með slíkum mælingum er hægt að leiða í ljós að:

Ef skammhliðar eru t.d. 6 og 8 þá sé langhliðin um það bil 10; Ef skammhliðar eru t.d. 5 og 12 þá sé langhliðin um það bil 13 o. s. frv.

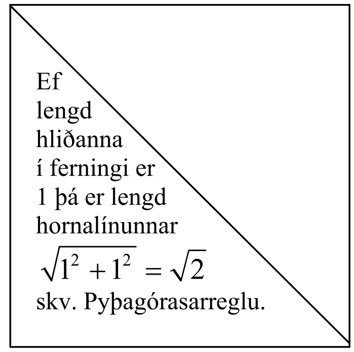
En þessi einstöku dæmi sanna ekki regluna og mælingar munu seint skera úr um hvort réttara sé að $a^2 + b^2 = c^2$ eða að $a^2 + b^2 = 1{,}0000000000000000001 \cdot c^2$. Þær svara því heldur ekki hvort reglan gildi um alla rétthyrnda þríhyrninga líka þá sem hafa aðra skammhliðina trilljón sinnum lengri en hina. En ef stærðfræðileg sönnun á reglunni er leidd af forsendum sem hafnar eru yfir allan vafa þá má fullyrða að reglan sé nákvæmlega rétt og algild.

Regla sú sem hér hefur verið rætt um er yfirleitt kennd við spekinginn Pyþagóras (um 580-500 f. Kr.) sem ásamt Þalesi er iðulega talinn einn helsti upphafsmaður stærðfræðilegra rannsókna meðal Grikkja.

Á þessum tíma var Grikkland töluvert stærra en það er nú, náði yfir mestalla strandlengju Miðjarðarhafsins frá þeim löndum sem nú tilheyra Ítalíu, inn með Svartahafi og með mestallri strandlengjunni sem nú tilheyrir Tyrklandi. Pyþagóras hélt sig að mestu á svæði sem nú er ítalskt land og Þales bjó á strönd Litlu-Asíu sem nú er í Tyrklandi.

Um gríska stærðfræði fyrir daga Evklíðs er því miður lítið vitað og öll grísk stærðfræðirit frá þessum tíma eru glötuð. Þó er vitað að það urðu þáttaskil í stærðfræði og fleiri vísindum þegar heimspekingurinn Platon stofnaði skóla í Aþenu milli 380 og 390 f. Kr. Sá skóli hét *Akademía* og var í raun fyrsti háskóli á Vesturlöndum. Þar var bæði stunduð kennsla og rannsóknir og stærðfræði var í sérstökum hávegum höfð umfram aðrar fræðigreinar. Á fyrstu árum Akademíunnar störfuðu þar nokkrir merkir stærðfræðingar. Þeirra frægastur er Evdoxus (408-355 f. Kr.)

Talið er að stærðfræðingar við *Akademíuna* hafi einkum fengist við rúmfræði og rúmfræðin náði meiri þroska en aðrar greinar grískrar stærðfræði. Tveim öldum fyrr, á tíma Pyþagórasar, virðast Grikkir hafa iðkað rúmfræði, talnafræði og algebru jöfnum höndum. En einhvern tíma milli Pyþagórasar og Evdoxusar rataði grísk algebra í ógöngur.



Grískir stærðfræðingar í fornöld litu á tölur sem hlutföll (eins og við gerum þegar við ritum almenn brot). En einhver snillingur komst að því að sumar stærðir er ekki hægt að tjá sem almenn brot. T.d. er ekki hægt að tjá lengd hornalínu í ferningi með hliðalengdina 1 sem almennt brot. Nú til dags er þetta orðað svo að $\sqrt{2}$ sé óræð tala. En Grikkirnir orðuðu þetta svo að lengd hornalínunnar verði ekki tjáð með neinni tölu því í þeirra augum voru tölur hlutföll (eða m. ö. o. almenn brot).

Þetta varð til þess að grískir stærðfræðingar vissu ekki almennilega hvað halda skyldi um tölur. Þeir voru nógu rökvísir, skýrir í hugsun og strangfræðilegir til að gera sér grein fyrir djúpum og torleystum vandamálum sem tengjast óræðum tölum. Þessi vandamál voru ekki leyst með viðhlítandi hætti fyrr en á 19. öld. Í stað þess að leiða vandann hjá sér eða reyna að kjafta sig frá honum með rugli og fimbulfambi fundu Grikkir leiðir fram hjá honum með því að umorða ýmis viðfangsefni á sviði algebru á mál rúmfræðinnar. Þetta er ein af mikilvægustu ástæðum þess að þeir lögðu meiri rækt við rúmfræði en aðrar greinar stærðfræði. Rúmfræðin var laus við þær röklegu ógöngur sem algebran rataði í þegar í ljós kom að sumar stærðir verða ekki tjáðar sem hlutföll milli heilla talna. Með sirkli og reglustiku er t.d. hægt að draga strik sem er $\sqrt{2}$ einingar að lengd þótt þessi stærð verði ekki tjáð sem ræð tala.

Sönnun þess að $\sqrt{2}$ sé óræð tala

Ekki er vitað hvernig menn hugsuðu fyrstu sönnun þess að hornalína í ferningi með hliðalengdir 1 verði ekki tjáð sem almennt brot en með orðalagi og táknmáli frá seinni tímum er hægt að sanna að $\sqrt{2}$ sé óræð tala svona:

Ef til er almennt brot sem er jafnt $\sqrt{2}$ þá er til fullstytt almennt brot p/q þannig að $\sqrt{2}$ = p/q. Þar sem brotið er fullstytt getur ekki verið að bæði p og q séu sléttar tölur. Fyrst $\sqrt{2}$ = p/q hlýtur að gilda að $2 = p^2/q^2 \Rightarrow 2q^2 = p^2$. Af þessu leiðir að 2 ganga upp í p^2 svo p er slétt tala, því sé oddatala hafin í annað veldi verður útkoman oddatala.

Þar sem p er slétt tala er til tala k þannig að $p = 2k$. Við getum því umritað jöfnuna $2q^2 = p^2$ svona: $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ svo q er líka slétt tala sem er í mótsögn við þá forsendu að p/q sé fullstytt brot. Það er því ekki til neitt fullstytt brot sem er jafnt $\sqrt{2}$ og þar með er sannað að $\sqrt{2}$ sé ekki jöfn neinni tölu sem hægt er að rita sem almennt brot.

Elsta gríska stærðfræðirit sem varðveist hefur er heljarmikið verk í 13 bókum sem heitir *Stoíkeia* og er eftir Evklíð. Á latínu og fleiri málum er þetta rit nefnt *Elementa* og á íslensku kallast það *Frumþættir*. Þessi bók var vinsælasta kennslubók í stærðfræði í Evrópu í meira en 2000 ár og fáar bækur hafa náð meiri útbreiðslu. Um æfi Evklíðs er nær ekkert vitað en talið er að hann hafi búið í Alexandríu og ritað þetta mikla verk á árunum milli 330 og 320 f. Kr.

Tvær skemmtilegar þjóðsögur tengjast nafni Evklíðs. Um sanngildi þeirra er ekki vitað. Samkvæmt annarri á konungur að hafa litið í *Frumþættina* og spurt Evklíð hvort ekki væri einhver styttri leið til að læra rúmfræði. Evklíð á þá að hafa svarað og sagt að engir kóngavegir liggi til rúmfræðinnar. Samkvæmt annarri sögu á piltur einn að hafa byrjað nám í rúmfræði. Þegar hann hafði stautað sig í gegnum fyrstu sönnunina spurði hann hvað maður græddi eiginlega á að læra þetta. Þá kallaði Evklíð þá þræl sinn og sagði honum að skjótast eftir smápeningum til að gefa stráksa fyrst hann gæti ekki lært nema græða á því.

Í *Frumþáttum* Evklíðs er safnað saman mestallri stærðfræðilegri þekkingu sem til var á þessum tíma. Öll efnistök voru til slíkrar fyrirmyndar hvað varðaði skipulega framsetningu og fræðilega nákvæmni að menn hættu að afrita eldri bækur og þær glötuðust.

Fyrstu sex bækur *Frumþáttanna* fjalla um flatarmyndir og tvívíða rúmfræði, næstu fjórar um talnafræði og algebru og þær síðustu þrjár um þrívíða rúmfræði. Sumar sannanir Evklíðs eru hinar mestu gersemar, eins og til dæmis sönnun hans á því að til séu óendanlega margar prímtölur.

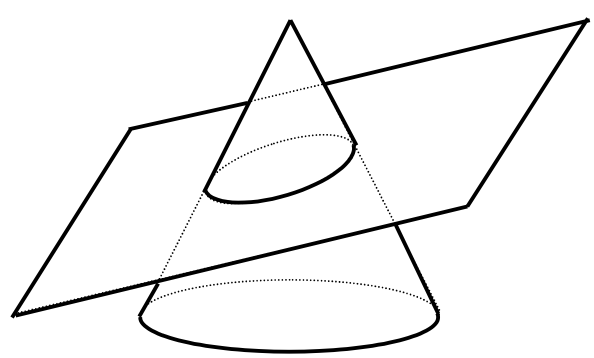
Sönnun Evklíðs á að til séu óendanlega margar prímtölur

Þetta er ekki þýðing á sönnun Evklíðs heldur lausleg endursögn:

Hugsum okkur að við höfum lista af prímtölum p_1, p_2, p_3 ... p_n. Hægt er að finna prímtölu sem er ekki á listanum með því að margfalda allar tölurnar á honum saman og bæta einum við. Þannig fæst tala $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ef N er prímtala þá er fundin ný prímtala sem er ekki á listanum. Ef N er hins vegar ekki prímtala þá er hægt að þátta hana í prímþætti og þeir prímþættir geta ekki verið á listanum því ef einhverri prímtölu af listanum er deilt í N gengur 1 af. Það er því sama hvaða við höfum talið upp margar prímtölur, það eru alltaf til fleiri.

Ekki er vitað hvort Evklíð uppgötvaði sjálfur eitthvað af þeirri stærðfræði sem finna má í *Frumþáttunum* eða hvort hann skipaði aðeins niður í röklegt kerfi því sem fyrirrennarar hans höfðu afrekað. Vitað er að auk *Frumþáttanna* skrifaði Evklíð bók um keilusnið en hún er glötuð.

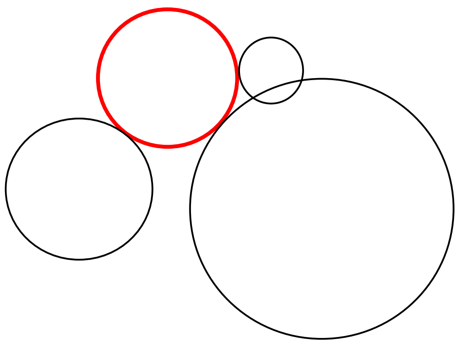
Af grískum stærðfræðingum sem uppi voru eftir daga Evklíðs eru Apollonius og Arkimedes langfrægastir. Langmestur hluti forngrískra stærðfræðirita sem varðveist hafa er skrifaður af þessum þremenningum.



Flötur sker keilu. Í þessu tilviki myndast sporbaugur

Apollonius (um 260 - um 170 f. Kr.) er frægastur fyrir ritið *Konika* sem fjallar um keilusnið. Keilusnið eru ferlar sem myndast þegar keila er skorin sundur af sléttum fleti, þ.e. sporbaugur (ellipsa), gleiðbogi (hyperbola) og fleygbogi (parabola). Þar sem rit Apolloniusar tók langt fram öllu því sem áður hafði verið skrifað um keilusnið hirtu menn ekki um að afrita eldri bækur um efnið og þær glötuðust, þ. á. m. bók Evklíðs sem áður er nefnd.

Rauði hringurinn snertir hina þrjá



Apollonius fjallaði um fleiri rúmfræðileg efni en keilusnið, m.a. um þraut sem við hann er kennt og kölluð þraut Apolloniusar. Hún er í því fólgin að teikna (með sirkli og ókvarðaðri reglustiku samkvæmt hefðbundnum reglum) hring sem snertir þrjá gefna hringi. Rit það sem geymdi lausn Apolloniusar á þessari þraut er glatað.

Arkimedes (um 287 - 212 f. Kr.) er með mestu afreksmönnum í allri sögu stærðfræðinnar. Hann bjó í Sýrakúsu á Sikiley. Níu bækur eftir hann hafa varðveist og í þeim fjallar hann um fjölmörg stærðfræðileg efni m.a.

- ✓ Aðferð til að nálgast rétt gildir á π.
- ✓ Aðferð til að reikna flatarmál sem afmarkast af línum og fleygboga.
- ✓ Rúmmál og yfirborð kúlu.

svo fátt eitt sé nefnt. Auk stærðfræðinnar fékkst Arkimedes við stjörnufræði og verkfræði. Meðal annars hannaði hann vopn og vígvélar til að verjast Rómverjum, en um þessar mundir voru þeir að leggja undir sig lönd við norðanvert Miðjarðarhaf og þrátt fyrir uppfinningar Arkimedesar náðu þeir Sýrakúsu á sitt vald.

Af Arkimedesi eru margar sögur í gömlum bókum. Ein segir frá því þegar hann sat í baði og uppgötvaði aðferð til að mæla eðlisþyngd hluta með því að vigta þá bæði í vatni og í lausu lofti. Varð hann svo frá sér numinn af hugmyndinni að hann stökk upp úr baðinu, hljóp nakinn um götur borgarinnar og hrópaði *evreka, evreka* en það merkir *ég hef fundið það.*

Önnur saga segir frá dauða Arkimedesar. Hann á að hafa setið, gamall maður, og rissað flatarmyndir í sandinn, niðursokkinn í rúmfræðipælingar, þegar rómverskur hermaður stóð allt í einu yfir honum. „Stígðu ekki á myndirnar mínar“ á Arkimedes að hafa sagt við hermanninn sem sjálfsagt hefur verið heimskur ribbaldi því hann brá sverði sínu og drap gamla manninn. Enginn veit hvað þumbi sá hét og líklega er öllum sama, en Arkimedesar verður minnst meðan enn er til hugsandi fólk.

Aðferðir þær sem Arkimedes mótaði vísuðu veginn til diffur- og tegurreikningsins sem Newton og Leibniz þróuðu á seinni hluta 17. aldar og það var ekki fyrr en á 17. öld sem stærðfræðilegar rannsóknir á Vesturlöndum komust aftur upp á sama plan og verk Arkimedesar.

Að mestu byggt á:

A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics,* Whasington DC 1964.

Kvaðrat hrings og óleysanleg verkefni

Í fornöld uppgötvuðu grískir stærðfræðingar leiðir til að teikna ýmsar flóknar myndir með því að fylgja föstum reglum og nota aðeins sirkil og ókvarðaða reglu-stiku. Reglurnar sem þeir fylgdu leyfðu aðeins að:

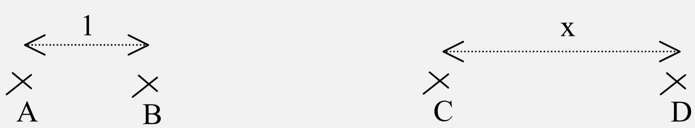
- ✓ Setja punkt hvar sem er á flötinn;
- ✓ Að draga strik eða línu milli tveggja punkta;
- ✓ Að draga hring um punkt og hafa bil milli hvaða tveggja punkta sem er fyrir radíus.
- ✓ Marka punkt þar sem tvær línur, tveir hringir eða lína og hringur skerast.

Með þessum einföldu aðgerðum er hægt að leggja saman tvær lengdir, draga eina lengd frá annarri, margfalda saman tvær lengdir og deila einni lengd í aðra. Einnig er hægt að draga kvaðratrót af gefinni lengd.

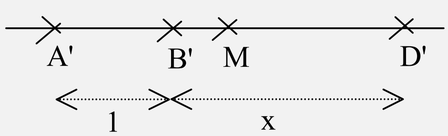
Að reikna kvaðratrót með sirkli og reglustiku

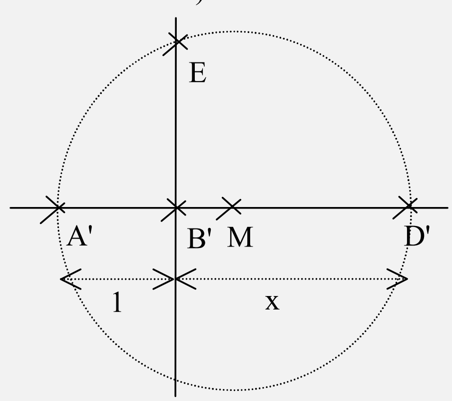
Til að leysa þetta verkefni þarf bil af lengd 1 að vera gefið.

Gerum ráð fyrir að bilið milli A og B sé 1 og finnum kvaðratrótina af bilinu milli C og D sem við skulum kalla x.



Við byrjum á að draga línu og marka á hana lengdirnar 1 og x. (Þetta er gert með því að marka fyrst punkt, A', af handahófi á línuna og draga svo hring, eða boga, með þann punkt fyrir miðju og fjarlægðina milli A og B fyrir radíus. Köllum skurðpunkt hringsins og línunnar B' og drögum annan hring með B' fyrir miðju og bilið milli C og D fyrir radíus. Köllum skurðpunkt hans við línuna D'.)





Næst er miðpunktur A'D' fundinn (með því að draga hring með A' fyrir miðju og A'D' fyrir radíus og annan með D' fyrir miðju og sama radíus og draga línu gegnum skurðpunkta hringanna. Á myndinni hér að ofan til vinstri er miðpunktur A'D' kallaður M.

Næst er dreginn hringur með miðju í M og A'M = MD' fyrir radíus. Að síðustu er svo dreginn þverill á línuna gegnum B' og markaður skurðpunktur hans við hringinn. Þennan punkt getum við kallað E. (Þverillinn er teiknaður með því að draga lítinn hring um B', marka skurðpunkta hans við línuna og nota þá fyrir miðjur tveggja hringa sem eru jafnstórir og báðir stærri en hringurinn um B'. Lína gegnum skurðpunkt þeirra er þverill á línuna gegnum punktinn B'.) Eftir þetta er myndin eins og hér að ofan til hægri.

Nú er ΔA'B'E ≈ ΔEB'D' svo ef fjarlægðin milli B' og E er y gildir jafnan:. $\frac{1}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$

Á tíma Evklíðs kunnu stærðfræðingar að byggja reikniaðgerðirnar +, -, ×, ÷ og √ með þeim teikniaðferðum sem hér hefur verið lýst. Auk þess gátu þeir leyst ótal þrautir eins og t.d. að teikna reglulegan fimmhyrning. Sum vandamál tókst þó ekki að leysa. Nokkur þeirra urðu fræg þegar í fornöld. Hér skal getið fjögurra:

- ✓ Að þrískipta horni. Sumum hornum eins og 90° og 45° er að vísu auðvelt að skipta í þrjá jafna hluta en sá vandi sem hér um ræðir er að finna aðferð sem dugar almennt og yfirleitt til að þrískipta hvaða horni sem er.
- ✓ Að tvöfalda tening. Ef hliðalengd tenings er gefin á að finna lengd hliða í teningi sem hefur tvöfalt meira rúmmál. Þetta er í raun sama vandamál og að reikna $\sqrt[3]{2}$ því séu hliðalengdir tenings margfaldaðar með $\sqrt[3]{2}$ fæst teningur með tvöfalt meira rúmmál.
- ✓ Að teikna reglulegan 7-hyrning.
- ✓ Að finna kvaðrat hrings. Ef radíus hringsins er gefinn á að finna hliðalengd í ferningi sem hefur sama flatarmál og hringurinn. Ef radíusinn er r er hliðalengd ferningsins að sjálfsögðu $r \cdot \sqrt{\pi}$. Þar sem hægt er að margfalda saman tvær gefnar lengdir og draga kvaðratrót af gefinni lengd er þetta í raun sama vandamál og að finna strik af lengdinni π.

Þessi vandamál vöfðust fyrir mönnum svo öldum skipti. Það er langt síðan stærðfræðinga tók að gruna að þau væru óleysanleg en engum þeirra tókst að sanna það fyrr en Gauss (1777-1855) sýndi fram á það undir lok 18. aldar að ómögulegt sé að teikna reglulegan 7-hyrning.

Gauss var undrabarn í stærðfræði og 17 ára að aldri komst hann að því að sé p prímtala er þá og því aðeins hægt að teikna reglulegan p-hyrning með sirkli og reglustiku að p verði rituð á forminu $2^{2^k}+1$ þar sem $k \in N$. Prímtölur á þessu formi eru kallaðar Fermat prímtölur. Þær fyrstu eru 3, 5, 17, 257, 65537. Samkvæmt niðurstöðu Gauss er því hægt að teikna reglulega 3-, 5- og 17-hyrninga með sirkli og reglustiku en ekki reglulega 7-, 11- og 13-hyrninga.

Sagt er að Gauss hafi verið ákaflega stoltur af þessari fyrstu meiriháttar uppgötvun sinni á sviði stærðfræðinnar. Eftir að hann dó var reist stytta af honum í heimaborg hans, Göttingen í Þýskalandi. Fótstallur þeirrar styttu er reglulegur 17-hyrningur.

Þótt Gauss hafi orðið þetta mikið ágengt fyrir lok 18. aldar var stærsta skrefið til skilnings á því hvað hægt er að gera og hvað ekki er hægt að gera með sirkli og ókvarðaðri reglustiku stigið í byrjun 19. aldar þegar Ítalinn Ruffini (1765-1822), Norðmaðurinn Abel (1802-1829) og Frakkinn Galois (1811-1832) mótuðu nýjar rannsóknaraðferðir í algebru. Tæknin sem þeir mótuðu dugði til að sanna að þrjú af þeim fjórum vandamálum sem hér hafa verið talin (að tvöfalda tening, teikna reglulegan 7-hyrning, og þrískipta horni) verði ekki leyst með sirkli, reglustiku og hefðbundnum aðferðum.

Þegar sagt er að þessi vandamál séu óleysanleg er ekki verið að útiloka að hægt sé að finna lausn sem er rétt upp á svo og svo marga markverða stafi. Það er hægt að leysa þau öll ef aðeins er krafist nákvæmni upp á endanlegan fjölda aukastafa. Að þessi vandamál séu óleysanleg þýðir að ekki sé hægt að finna lausn af fullkominni nákvæmni. Leikreglurnar gera ráð fyrir að línur og bogar sem teiknaðir eru hafi enga þykkt, punktar enga stærð og reglustikunni og sirklinum sé beitt af algerri nákvæmni.

*

Snúum okkur nú að þeim uppgötvunum sem leiddu til þess að stærðfræðingum tókst að sanna þessi vandamál séu óleysanleg.

Á 16. og 17. öld fundu stærðfræðingar almennar formúlur til að finna rætur margliða af þriðja og fjórða stigi. Þessar formúlur voru myndaðar úr stuðlum margliðunnar, reikniaðgerðunum fjórum, veldum og rótum og því svipaðar formúlunni til að finna rætur annars stigs margliðu sem þekkt var síðan í fornöld. Menn bjuggust því við að senn fyndust ámóta aðferðir til að finna rætur margliða af fimmta stigi en í byrjun 19. aldar sönnuðu Abel og Ruffini að það sé ekki hægt að búa til algebrulega formúlu fyrir rótum margliðu af hærra stigi en fjórða. Þegar rætt er um algebrulega formúlu er átt við að hún sé samsett úr samlagningu, frádrætti, margföldun, deilingu, og veldum með ræðum veldisvísum (og þar eru rætur innifaldar því $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$). Aðferðirnir sem Abel, Ruffini og Galois mótuðu dugðu líka til að sanna að hvorki sé hægt að tjá rætur þriðja stigs margliðu né óræða þriðju rót af tölu (eins og t.d. $\sqrt[3]{2}$) með því að nota einungis reikniaðgerðirnar fjórar heiltöluveldi og kvaðratrót.

Formúlan fyrir rótum annars stigs margliðu

Margliða er stærð eins og $3x^4 + 4x^2 + 5x + 7$ eða almennt talað stærð á forminu $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$. Rætur margliðu eru þau gildi sem x þarf að hafa til að stærðin í heild sé jöfn núlli. T.d. eru -3 og 5 rætur $2x^2 - 4x - 30$.

Hæsti veldisvísirinn ræður stigi margliðu. Þannig hefur annars stigs margliða x^2 en ekki nein hærri veldi en það. Almenna reglan um rætur annars stigs margliðu er:

Ef $ax^2 + bx + c = 0$ þá er $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Eins og nefnt hefur verið er hægt að reikna samlagningu, frádrátt, margföldun, deilingu og kvaðratrót með sirkli og reglustiku. Þetta þýðir að séu í upphafi gefnar ræðar lengdir eða punktar með ræð hnit er hægt að mynda úr þeim allar lengdir og öll hnit sem fást með endurtekinni beitingu þessara fimm aðgerða á ræðar tölur. Aðrar stærðir er ekki hægt að mynda með sirkli, reglustiku og hefðbundnum aðferðum. Til að átta okkur á því hvers vegna það er ekki hægt skulum við huga að því að á mynd sem gerð er með sirkli og reglustiku ákvarðast punktar með tvennum hætti:

- ✓ Af skurðpunkti tveggja lína. Hnit slíks punkt finnast með því að leysa jöfnu af fyrsta stigi og það er hægt að gera með því að beita aðeins samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu.
- ✓ Af skurðpunkti hrings við línu eða annan hring. Hnit slíks punkt finnast með því að leysa jöfnu af öðru stigi og það er hægt að gera með því að beita aðeins samlagningu, frádrætti, margföldun, deilingu og kvaðratrót.

Lengd strika sem verða til á teikningunni má reikna út frá hnitum punkta með því að beita pyþagórasarreglu og hún byggist á þessum sömu aðgerðum. Sé lagt upp með ræð hnit og ræðar lengdir er því engin leið að mynda aðrar stærðir en þær sem fást með endurtekinni beitingu á aðgerðanna +, -, ×, ÷ og √ á ræðar tölur. Með þessu er hægt að mynda allar ræðar tölur ef gefið er bil af lengdinni 1 og líka óræðar tölur eins og $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eða $\sqrt{32-\sqrt{8-\sqrt{\frac{13}{7}-\sqrt{2}}}}$. En það er af og frá að þetta dugi til að mynda allar tölur. Það er til dæmis ekki hægt að mynda $\sqrt[3]{2}$. Sumar margliður af hærra stigi en fjórða hafa rætur sem ekki er einu sinni hægt að tjá þó nota megi alla ræða veldisvísa auk reikniaðgerðanna fjögurra, +, -, × og ÷. Þessar stærðir er að sjálfsögðu ekki heldur hægt að mynda með sirkli og reglustiku ef byrjað er með tómar ræðar stærðir.

Ef til væru almennar aðferðir til að þrískipta horni, tvöfalda tening, teikna reglulegan 7-hyrning og finna kvaðrat hrings þá væri hægt að beita þeim á horn, strik og hringa af hvaða stærð sem er. Aðferð til að tvöfalda tening ætti að virka óháð því hvaða lengd er gefin sem hlið í honum. Eins ætti aðferð til að teikna 7-hyrning að virka óháð því hvaða lengd er gefin sem hlið í honum. Aðferðirnar ættu því að virka þótt allar stærðir sem byrjað er með séu ræðar.

Í ljósi þess sem að framan segir má ljóst vera að til að sanna að ekki sé hægt að leysa þessi verkefni dugar að sýna að lausnin innifeli stærð sem ekki verður mynduð af ræðum tölum með endurtekinni beitingu aðgerðanna +, -, ×, ÷ og √.

Eins og nefnt hefur verið jafngildir tvöföldun tenings því að mynda stærðina $\sqrt[3]{2}$ og það er ekki hægt. Á svipaðan hátt var sýnt fram á það á fyrri hluta 19. aldar að ekki sé hægt að mynda reglulegan 7-hyrning eða þrískipta horni. Það reyndist töluvert flóknara mál að sanna að ekki sé hægt að finna kvaðrat hrings með sirkli og reglustiku. Þetta tókst ekki fyrr en Lindemann sannaði það árið 1882 að π sé ekki algebrísk tala (þ.e. að ekki sé til margliða með ræðum stuðlum sem hefur π fyrir rót). Af þessari uppgötvun Lindemanns leiðir að talan π verði ekki mynduð með endurtekinni beitingu á aðgerðunum +, -, ×, ÷ og √ á ræðar tölur og þar með að ekki sé heldur hægt að mynda lengdina $\sqrt{\pi}$ eins og þarf að gera til að finna kvaðrat hrings.

Að mestu byggt á: R. Courant og H. Robbins: *What is Mathematics*. Oxford 1996.

Talan $\pi \approx 3.14159265358979323846264338327 95$

Talan sem þarf að margfalda þvermál hrings með til að fá út ummál hans er kölluð pí og táknuð með gríska stafnum π sem samsvarar p í latneska stafrófinu.

Það er hægt að sannreyna að π er rúmlega 3 með því að mæla ummál og þvermál kringlótts hlutar með málbandi og deila og slíkum aðferðum hafa menn beitt frá örófi alda.

Í Babylónískum stærðfræðiritum frá því um 2000 f. Kr. er því haldið fram að π sé $3\frac{1}{8}$. Hvernig höfundar komust að þeirri niðurstöðu vitum við ekki en trúlegt er að þeir hafi stuðst við mælingar á hringlaga hlutum.

Fleiri fornþjóðir eins og Egyptar, Kínverjar og Indverjar fengust við stærðfræði og áttuðu sig á að π muni vera rétt rúmlega 3.

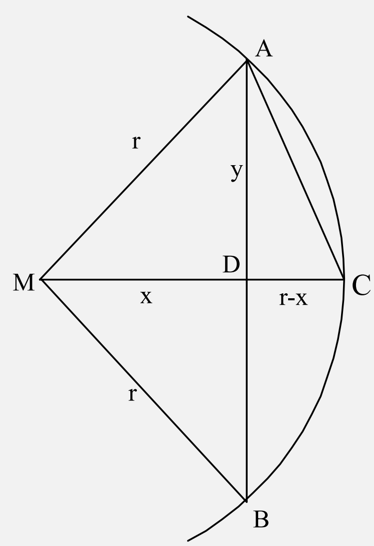
Stærðfræðilegar aðferðir til að nálgast rétt gildi á π upp á meira en 2 til 3 markverða stafi mótuðust meðal grískra vísindamanna. Sá þeirra sem komst lengst var Arkimedes (um 287-212 f. Kr.). Aðferð hans byggðist á því að reikna ummál umritaðs og innritaðs 96-hyrnings.

Arkimedes notaði ekki hornaföll svo það var töluvert mikið verk fyrir hann að reikna þetta. Það er auðvelt að reikna hliðalengd í umrituðum og innrituðum 6-hyrningi. Arkimedes fann leið til að reikna hliðalengd í innrituðum og umrituðum 2n-hyrningum út frá lengdum hliða í n-hyrningi. Þannig gat hann reiknað hliðalengdir (og þar með ummál) 12, 24, 48 og 96 hyrninga. Og með því að nota sömu aðferð hefði verið hægt að halda áfram og reikna hliðalengd umritaðs og innritaðs 192-hyrnings.

Ummál hrings er á milli ummáls innritaðs og umritaðs n-hyrnings og bilið er því þrengra sem n er hærri tala.

Með þessari aðferð komst Arkimedes að því að $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ sem er nokkurn veginn sama bil og $3.140845 < \pi < 3.142857$.

Að reikna hliðalengd reglulegs marghyrnings með 2n horn út frá hliðalengd reglulegs n-hyrnings



Reglulegur n-hyrningur er innritaður í hring með gefinn radíus. Ef lengd hliða í n-hyrningnum er þekkt þá er hægt að reikna lengd hliða í innrituðum marghyrningi með 2n horn með þeirri aðferð sem hér greinir.

Köllum miðju hringsins M og gerum ráð fyrir að strikið AB sé ein hlið í n-hyrningnum. Strikið MC helmingar $\angle AMB$ og C liggur á hringferlinum. Þá er AC ein hlið í innrituðum marghyrningi með 2n horn.

Látum D vera skurðpunkt AB og MC og

látum x tákna lengd striksins MD og y tákna lengd striksins AD.

Auðvelt er að reikna y þar sem AB er þekkt því $y = \frac{AB}{2}$

Þegar y er fundið er vandalaust að reikna x því $x^2 + y^2 = r^2$ svo $x = \sqrt{r^2 - y^2}$

Þegar x og y er fundið er hægt að reikna lengd AC með Pyþagórasarreglu því

$$AC = \sqrt{(r-x)^2 + y^2} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

Á fyrstu öldum okkar tímatals komust kínverskir stærðfræðingar fram úr Arkimedesi. Á 3. öld e. Kr. reiknaði Liu Hui ummál innritaðs og umritaðs 192-hyrnings og fékk út að $3.141024 < \pi < 3.142704$ og á 5. öld reiknaði Tsu Chung Chih út að $3.1415926 < \pi < 3.145927$.

Aðferð Arkimedesar var ekki endurbætt af Evrópumönnum fyrr en á 17. öld þegar Newton reiknaði π með 16 markverðum stöfum og Leibniz fann runu til að nálgast gildi á fallinu arctan.

Runan sem Leibniz uppgötvaði er oftast skrifuð svona:

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - x^{11}/11 + ...$$

Hér er gert ráð fyrir að stærð horns sé mæld í radíönum (þar sem $360° = 2\pi$ radíanar). Þar sem $\tan(\pi/4) = 1$ fæst fjórðungur af π með því að setja 1 inn fyrir x í runu Leibniz svo

$$\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + ...)$$

Þar sem runan er endalaus er ekki hægt að ljúka þessum reikningi en með því að halda nógu lengi áfram er hægt að reikna π með hvað mikilli nákvæmni sem er. Sama má reyndar segja um aðferð Akimedesar. Með því að helminga hornið nógu oft er hægt að reikna π með hvað mörgum aukastöfum sem er. En aðferð Leibniz er fljótlegri og auðveldari.

Í byrjun 18. aldar reiknaði stjörnufræðingurinn Abraham Sharp π með 72 markverðum stöfum. Síðan hefur margt gerst í rannsóknum á π hér verður fátt eitt nefnt.

Árið 1755 fann Leonhard Euler fljótlega aðferð til að nálgast rétt gildi á π þegar hann sannaði að

$$\pi = 12(1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + 1/5^2 - 1/6^2 + ...)$$

Árið 1766 sannaði Jóhann Lambert að π sé óræð tala.

Árið 1882 sannaði F. Lindemann að π sé ekki algebrísk tala (þ.e. ekki sé til margliða með ræðum stuðlum sem hefur núllstöð í π).

Um miðja 20. öld voru fyrstu tölvurnar smíðaðar og með hjálp þeirra tókst að reikna meira en 1.000 fyrstu aukastafi π fyrir 1950 og 1961 voru 100.000 fyrstu aukastafi π þekkir.

Að mestu byggt á:
A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics,* Whasington DC 1964.
P. Beckmann: *A History of π*, New York 1971.