GeoGebra

Hér eru nokkrar hugmyndir um hvernig nota má forritið GeoGebra í kennslu í framhaldsskólum. Annars vegar eru það dæmi um notkun við kennslu tvinntalna á efri stigum náttúrufræðibrautanna, og hins vegar rúmfræðikennsla á fyrri stigum.

Ég held að það sé óumdeilt að það hjálpar nemendum heilmikið að geta fært til breyturnar og séð hvað breytist við það

Tvinntölur

Eins og nemendur komast fljótt að raun um er hentugt að tákna tvinntölur í tvívíðu hnitakerfi, þar sem lárétti ásinn táknar venjulegu talnalínuna en sá lóðrétti stendur fyrir þverhluta tvinntalnanna. Á þessu stigi hafa nemendur yfirleitt kynnst vigrum og samlagningu þeirra, svo samlagning tvinntalnanna í hnitakerfinu ætti ekki að vera mjög framandi. Hins vegar er margföldunin líklega ný fyrir þau, svo tilvalið er að nota GeoGebra til þess að glöggva sig á hvernig hún virkar.

Eins er forritið heppilegt fyrir nemendur til að átta sig á veldum og sérstaklega rótum tvinntalna. Sumir nemendur eiga til dæmis erfitt með að átta sig á hvers vegna talan 1 hefur þrjár þriðju rætur. Það hjálpar vonandi mörgum að sjá það sett fram á myndrænan og hreyfanlegan hátt.

Samlagning tvinntalna

Til að kynna hnitakerfisframsetningu tvinntalnanna, og leyfa nemendum að venjast því að hugsa um tvinntölur sem tvívíð fyrirbæri, má byrja á að skoða samlagningu tveggja eða fleiri tvinntalna. Hana má útskýra á sama hátt og vigra, með hornalínum í samsíðungi.

Margföldun tvinntalna

Margföldun tvinntalna er einfaldast að átta sig á út frá pólforminu. Með því að fylgjast með hornunum við jákvæða x-ásinn og lengdum strikanna frá tölunum að upphafspunkti hnitakerfisins, á meðan tvinntölurnar eru dregnar til (og margfeldi þeirra hreyfist með til samræmis) má auðveldlega koma auga á regluna um summu hornanna og margfeldi lengdanna. Ég hugsa að það sé gott fyrir nemendur að uppgötva þessi tengsl sjálfir ef þeir geta. Verkefni sem leggja mætti fyrir nemendur gæti litið einhvern veginn svona út:

1		Merkið inn punkta A og B
2		Skilgreinið punktinn AB=(x(A)*x(B)-y(A)*y(B),x(A)*y(B)+y(A)*x(B)) í inntaksreit
3		Dragið punktana A og B til og fylgist með hvernig AB hegðar sér
4		Skilgreinið punktana O=(0,0) og I=(1,0)
5		Merkið inn strikin O-A, O-B og O-AB
6		Merkið inn hornin I-O-A, I-O-B og I-O-AB
7		Þið getið stækkað og minnkað hornbogana, breytt litunum á þeim og fleira með því að hægrismella á þau og fara í properties, sem og dregið tölurnar fjær hornpunktinum, svo þær verði auðlesnari. Til að fækka sýnilegum aukastöfum er hægt að fara í Options>Decimal places.
8		Hreyfið nú punktana A og B til og fylgist með hornastærðunum. Takiði eftir einhverju sambandi milli þeirra? Ef α er hornið I-O-A og β er hornið I-O-B, hver er summa hornanna α og β?
9	ABC	Setjið inn textabox með textanum "α + β = " + (α + β) Þetta sýnir sjálfkrafa summu α og β jafnóðum og þið færið punktana. Berið það saman við γ.
10		Hægrismellið á strikið O-A, sem ætti að hafa fengið nafnið a þegar þið bjugguð það til. Farið í properties>basic og veljið “Name & Value” í valblaðinu fyrir aftan reitinn “Show label”. Gerið það sama fyrir strikin b og c.
11		Dragið nú punktana A og B til og fylgist með lengdum strikanna. Takiði eftir einhverju

		sambandi milli þeirra?
12		Setjið inn textabox með textanum "a*b = " + (a b) Þetta sýnir sjálfkrafa margfeldi a og b jafnóðum og þið færið punktana. Berið það saman við lengd c.
13		Ef við lítum á punktana A og B sem tvinntölur, þar sem x-hnitið er raunhlutinn og y-hnitið er þverhlutinn, þá táknar punkturinn AB á þann hátt tvinntölu sem er margfeldi talnanna sem A og B tákna. Pólform þeirra er þá gefið með lengd viðkomandi striks og horninu við x-ásinn (í jákvæða stefnu). Hvaða ályktun má draga af þessu um margfeldi tveggja tvinntalna?

Til þess að nýta sér svona verkefni þyrftu nemendurnir ekki að hafa mikla kunnáttu í forritinu, þar sem þeir geta bara afritað úr töflunni það sem þau þurfa að setja inn í inntaksreitinn. Annað ætti kennarinn að geta áréttað auðveldlega.

Veldi tvinntalna

Til að finna veldi tvinntölu má búa til nýja skipun í forritinu til að finna margfeldi tveggja tvinntalna, og nota hana svo endurtekið á töluna. Önnur leið væri að nota pólformið, en ef markmiðið er að kenna pólformið og sýna fram á gagnsemi þess, þá er líklega betra að skilgreina margföldunina út frá grunnforminu, og sýna svo hvernig hornið milli jákvæða x-ássins og t.d. 3. veldis tölunnar er 3 sinnum horn tölunnar sjálfrar, og eins fyrir lengdirnar. Því það er ekki augljóst út frá venjulega forminu.

Hins vegar ef ætlunin er bara að sýna hvernig veldið færist til þegar talan er hreyfð getur verið þægilegra að nota tilbúinn forritsbút eða html glugga til að flýta fyrir, og þá er alveg eins hægt að nota pólformið, því nemandinn sér ekki hvernig veldið er skilgreint.

Í forritsbútnum VeldiTvinntalna.ggb er talan A hafin í n-ta veldi, þar sem n er ákvarðað af rennistiku. A er einskorðuð við einingahringinn, því þegar n er hátt er A í n-ta veldi hvort sem er fljótt að hverfa út úr glugganum eða inn að núlli þegar A er færð út úr eða inn úr einingahringnum. Það sést aftur á móti vel hvernig hornið margfaldast.

Rætur tvinntalna

Til að finna rætur gefinnar tvinntölu er þægilegast að nota rótarformúluna fyrir pólformið, en það krefst dálítillar leikni með forritið að láta allar ræturnar birtast. Ef markmiðið er bara að sýna hvernig ræturnar færast til eftir því sem talan sjálf er færð er líklega betra að notast við tilbúinn forritsbút, til þess að þurfa ekki að eyða tíma í að kenna nemendunum á sequence skipunina.

Forritsbúturinn RaeturTvinntalna.ggb er dæmi um hvernig slíkur forritsbútur gæti litið út. Þar táknar punkturinn A tvinntöluna sem við erum að skoða og n-tu rætur hans birtast á hring umhverfis 0-punktinn. Rennistika ákvarðar gildið á n, svo t.d. ef n=3, þá birtast 3 þriðju rætur tölunnar á hringnum. Punkturinn B er önnur tala, sem hafin er í n-ta veldi, og er notuð til að "máta" ræturnar, þ.e. ef B er færður að einni af þriðju rótum tölunnar A, þá færist B í þriðja veldi að punktinum A. Þannig sér nemandinn glöggt hvers vegna ræturnar eru jafn margar og raun ber vitni. Einnig má færa punktinn A til og fylgjast með því hvernig ræturnar færast með.

Rúmfræði

Rúmfræðin er auðvitað tilvalið viðfangsefni fyrir forrit eins og GeoGebru. Þar er af nógu að taka, en ég ætla að halda mig við tvennt. Annars vegar reglurnar um horn sem spanna hringboga og samband þeirra við bogana sem þau spanna, og hins vegar um þríhyrninga – nánar tiltekið innritaða og umritaða hringi.

Ferilhorn

Reglan um að ferilhorn sé jafnstórt hálfum boganum sem það spannar er dæmi um reglu þar sem sönnunin er gjarnan útskýrð með mynd, og sú mynd gæti verið enn gleggri ef hún er hreyfanleg.

Skráin Ferilhorn1.ggb sýnir tilfellið þar sem annar armur hornsins gengur í gegnum miðju hringsins, og skráin Ferilhorn2.ggb tekur fyrir tilfellið þar sem báðir armarnir eru frjálsir. Í fyrri skránni sést gjörla hvernig miðhornið er ytra horn við topphorn í jafnarma þríhyrningi þar sem ferilhornið er annað grunnhornið, og því er ljóst hvers vegna miðhornið er tvöfalt stærra. Á seinni myndinni sést svo hvernig miðhornið er summa eða mismunur tveggja horna sem hvort um sig eru ytri horn í slíkum þríhyrningum. Ferilhornið er svo samsvarandi summa eða mismunur grunnhorna í sömu þríhyrningum. Auðvitað má benda á þetta allt saman í texta sem fylgir myndinni, en það liggur við að myndin tali fyrir sig sjálf þegar nemandinn getur hreyft armana til og fylgst með því hvernig þetta hangir saman.

Skráin Skurðhorn.ggb skoðar svo hvað gerist þegar hornið er ekki endilega á hringnum svo það er ekki ferilhorn. Ef hornið er inni í hringnum er það jafnstórt hálfri summunni af bogunum sem það og topphorn þess spanna, en ef hornið er utan við hringinn er það jafn stórt hálfum mismuninum á boganum sem er fjær horninu og þeim sem er nær. Þetta má sýna skýrt með svona hreyfanlegri mynd.

Þríhyrningar

Fyrir gefinn þríhyrning er ávallt til innritaður hringur – hringur sem er þannig að hliðar þríhyrningsins eru snertlar við hringinn. Það er eitt að hafa heyrt þetta, en annað að vita hvernig maður getur teiknað innritaða hringinn þegar það eina sem maður hefur í höndunum er þríhyrningurinn. Til þess að teikna innritaða hringinn þarf að nýta sér það að helmingalínur horna þríhyrningsins skerast í miðju innritaða hringsins. Þá er auðvelt að finna miðjuna, og geislinn er síðan bara fjarlægð miðjunnar frá hliðum þríhyrningsins. Sem sagt, það mikilvægasta er að nemandinn átti sig á hvers vegna miðja hringsins liggur á helmingalínum hornanna, út frá einslaga þríhyrningum. Til að sú þekking festist í sessi getur síðan verið gott fyrir hann að spreyta sig á að teikna innritaðan hring í gefinn þríhyrning.

Það sama á við um umritaðan hring, nema það er bara þegar til skipun í forritinu sem gerir það fyrir mann. Engu að síður er hægt að nota forritið til að kenna hvernig hægt er að finna umritaðan hring án þess að nota þá skipun. Þá þarf nemandinn fyrst að átta sig á að miðja slíks hrings hlýtur að liggja á miðþverlum allra hliðanna. Eftir það er lítið mál að teikna miðþverlana og finna skurðpunkt þeirra til að finna miðju hringsins.

Í báðum tilfellum gæti verið gott að láta nemandann fyrst byrja með hring og teikna þríhyrninginn þannig að hringurinn verði innritaður/umritaður hringur fyrir þríhyrninginn, til að átta sig á reglunum um helmingalínurnar og miðþverlana. Verkefni fyrir umritaða hringinn gæti t.d. verið eitthvað á þessa leið:

1		Teiknið hring með miðju í A sem liggur í gegnum punktinn B.
2		Setjið inn þrjá punkta, C, D og E á hringinn.
3		Teiknið strikin C-D, D-E og E-C.
4		Teiknið nú strikin A-C og A-D frá miðju hringsins að hornpunktum þríhyrningsins.
5		Hægrismellið á strikið A-C, farið í properties>basic og veljið “Value” í valblaðinu fyrir aftan reitinn “Show label”. Gerið það sama við strikið A-D. Eftir hverju takiði?
6		Teikniði inn hornin A-C-D og C-D-A. Hægrismellið á þau, farið í properties>basic og takið hakið úr reitnum “Allow reflex angle”.
7		Teiknið hæðina frá A á C-D.
8		Merkið inn fótpunkt A á strikinu C-D. Hann ætti að fá sjálfkrafa nafnið F.
9		Merkið inn strikin C-F og D-F og athugið lengdirnar á þeim.
10		Teiknið miðþverlana fyrir strikin C-E og D-E. Takið eftir hvar þeir skerast
11		Byrjið nú með autt teikniborð og búið til þríhyrning
12		Notiði nú það sem þið hafið lært, til þess að teikna umritaðan hring um þennan þríhyrning, án þess að nota skipunina sem leyfir ykkur að teikna hring í gegnum þrjá gefna punkta.