

# Sérsniðin verkfæri og verkfærastika

Vinnublað 7

Judith og Markus Hohenwarter

[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Íslensk þýðing: ágúst 2010

Þýðendur

Freyja Hreinsdóttir

Guðrún Margrét Jónsdóttir

Nanna Guðrún Hjaltalín

Vilhjálmur Þór Sigurjónsson

Íslensk þýðing var styrkt af Þróunarsjóði námsgagna, Vinnumálastofnun og Menntavísindasviði Háskóla Íslands.

---

## Efnisyfirlit

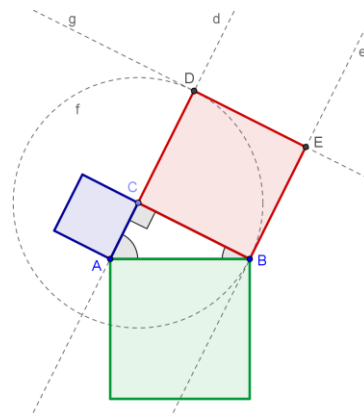
1.	Regla Pýþagórasar	2
2.	Að búa til sérsniðin verkfæri	4
3.	Að flytja inn og vista sérsniðin verkfæri	6
4.	Að búa til ferningsverkfæri	6
5.	Fibonacci kuðungurinn	7
6.	Að smíða miðju hrings	9
7.	Að sérsníða verkfærastiku	10
8.	Áskorun dagsins: Uppgötvun Eulers	12



# 1. Regla Pýþagórasar

## Undirbúningur

- Opnið nýja GeoGebruskrá.
- Felið algebruggann, inntaksreitinn og ása hnitakerfisins (*Skoða*).
- Hakið við *Nýir punktar eingöngu* (*Valkostir – Merkingar*).



## Leiðbeiningar

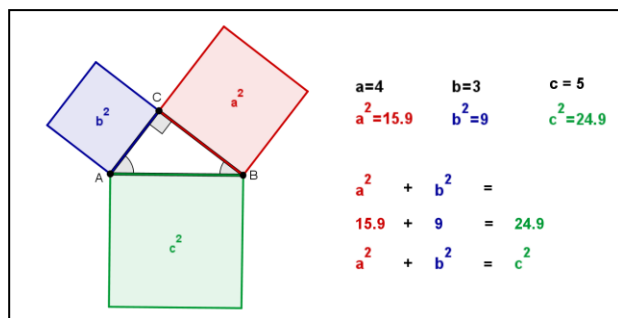
1		Línustrik $a$ með endapunkta $A$ og $B$
2		Hálfringur $c$ gegnum punktana $A$ og $B$
3		Punktur $C$ á hálfringnum <u>Ábending:</u> Athugið hvort $C$ er örugglega á hringboganum með því að draga hann með músinni.
4		Felið hálfringinn og línustrikið.
5		Búið til þríhyrninginn $ABC$ rangsælis.
6		Endurnefnið hliðar þríhyrningsins $a$ , $b$ og $c$ .
7		Horn þríhyrningsins $ABC$ <u>Ábending:</u> Smellið í miðjan þríhyrninginn, þá myndast öll hornin.
8		Dragið $C$ til að sannreyna að smíðin sé rétt.
9		Hornrétt lína $d$ á línustrik $BC$ í gegnum punktinn $C$
10		Hornrétt lína $e$ á línustrik $BC$ í gegnum punktinn $B$
11		Hringur $f$ með miðju í $C$ sem gengur í gegnum punktinn $B$ .
12		$D$ skurðpunktur hringsins $f$ og línustriksins $d$ . <u>Ábending:</u> Smellið beint á <i>efri</i> skurðpunkt $f$ og $d$
13		Lína $g$ sem fer í gegnum punktinn $D$ og er samsíða $BC$ .
14		$E$ skurðpunktur línanna $e$ og $g$



15		Ferningur $CBED$
16		Felið hjálparlínur og hring.
17		Endurtakið skref 9 til 16 fyrir hlið $AC$ í þríhyrningnum.
18		Endurtakið skref 9 til 16 fyrir hlið $AB$ í þríhyrningnum.
19		Dragið hornpunkta þríhyrningsins til að fullvissa ykkur um að ferningurinn sé réttur.
20		Notið <i>Eiginleika</i> til að bæta smíðina (til dæmis breyta lit, gerð línu eða fela merkingar).

## Að bæta smíðina

Bætið smíðina með því að setja inn fastan og kvikan texta sem útskýrir Pýþagórasarregluna  $a^2 + b^2 = c^2$  þar sem  $a$  og  $b$  eru skammhliðar og  $c$  er langhlið rétthyrningsins.



## Kynning á nýju verkfæri


	<b>Afrita útlit</b>	<b>Nýtt!</b>
	<p>Ábending: Smellið á hlut til að afrita útlit hans. Smellið svo á annan hlut sem mun þá taka upp útlit fyrri hlutarins.</p>	

**Ábendingar:** Lesið stikuhjálpinu ef óljóst er hvernig nota á verkfæri. Prófið verkfærið áður en það er notað í smíði.

## Leiðbeiningar

21		Miðpunktur allra ferninganna <u>Ábending:</u> Smellið á tvo mótstæða hornpunkta í hverjum ferningi.
22	ABC	Fastur texti <i>texti1</i> : „ $a^2$ “. Staðsetjið <i>texti1</i> við miðpunkt tilsvarandi fernings. <u>Ábending:</u> Munið að haka við LaTeX til að fá $a^2$ .
23	ABC	Fastur texti <i>texti2</i> : „ $b^2$ “. Staðsetjið <i>texti2</i> við miðpunkt tilsvarandi fernings.
24	ABC	Fastur texti <i>texti3</i> : „ $c^2$ “. Staðsetjið <i>texti3</i> við miðpunkt tilsvarandi fernings.
25		Felið miðpunkta ferninganna.



26		Sníðið textann þannig að litur hans passi við lit tilsvareandi fernings.
27	ABC	Setjið inn texta sem útskýrir Pýþagórasarregluna.
28		Flytjið smíðina út sem kvikt vinnublað. Útskýrið Pýþagórasarregluna fyrir nemendum ykkar.

## 2. Að búa til sérsniðin verkfæri







Í GeoGebru er hægt að búa til sérsniðin verkfæri. Hægt er að búa til eigin verkfæri og bæta þeim á verkfærastikuna. Við búum nú til verkfæri sem mælir minnstu fjarlægð milli línu og punkts (t.d. hæð þríhyrnings). Áður en það er hægt, verður að smíða alla þá hluti sem nota þarf í verkfærinu.

### Undirbúningur smíðinnar

#### Undirbúningur


- Opnið nýja GeoGebruskra.
- Felið algebruglugga, ása og inntaksreit (*Skoda*).
- Hakið við *Allir nýir hlutir* (*Valkostir – Merkingar*).

#### Leiðbeiningar

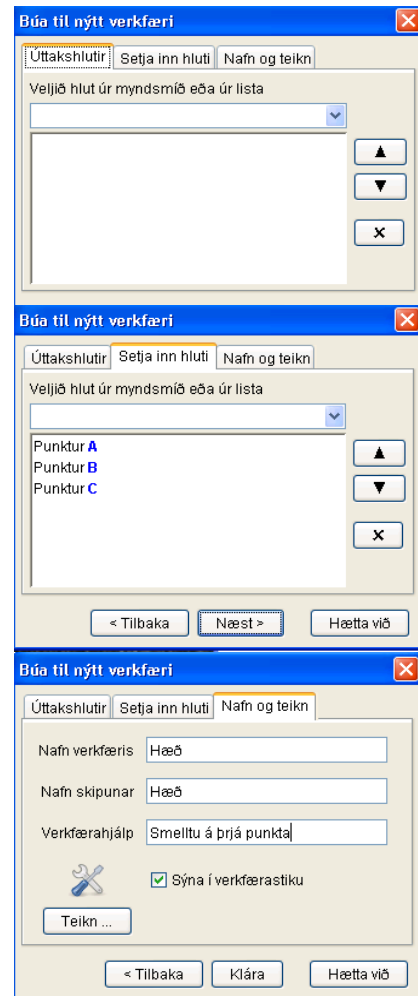
1		Lína $a$ gegnum tvo punkta $A$ og $B$ .
2		Nýr punktur $C$ .
3		Lína $b$ hornrétt á línu $a$ í gegnum $C$ .
4		Skurðpunktur línanna $a$ og $b$ , $D$ .
5		Línustrik $c$ milli $C$ og $D$ .
6		Dragið punktana $A$ , $B$ og $C$ til að sannreyna smíðina.
7		Breytið lit línustriksins $c$ og felið öll merki.



## Sérnsniðið verkfæri búið til

1. Smellið á  *Búa til nýtt verkfæri...* í *Verkfærum* þá opnast nýr gluggi.
2. Hafið flipann *Úttakshlutir* virkan.
3. Veljið úttakshlut annaðhvort með því að smella á hann á teikniborðinu (okkar dæmi: línustrikið *c*) eða velja hann af fellilistanum (smellið á litlu örina í inntaksreitnum).
4. Smellið á *Næst >* hnappinn til að virkja flipann *Setja inn hluti*.
5. GeoGebra sýnir nú þá hluti sem eru inni fyrir verkfærið þitt (í þessu tilfalli: punktarnir *A*, *B* og *C*).
6. Smellið á *Næst >* hnappinn til að virkja flipann *Nafn og teikn*.
7. Skráið nafn á verkfærinu og texta fyrir stíkuhjálpinu.  
Ath: GeoGebra fyllir sjálfkrafa í reitinn *Nafn skipunar*.
8. Smellið á hnappinn *Klára*.

Ath: Núna er nýja verkfærið hluti af verkfærastíku GeoGebra.




## Prófaðu verkfærið þitt

1. Opnið nýja GeoGebruskrá *Skrá – Nýtt*.  
Athugasemd: Verkfærið er enn hluti af verkfærastíkunni.
2. Búið til þríhyrning, notið verkfærið *Marghyrningur*.
3. Virkjið verkfærið *Hæð*.
4. Smellið á punktana *A*, *B* og *C* til að finna eina af hæðum þríhyrningsins.
5. Finnið aðra hæð í þríhyrningnum.
6. Finnið hæðaskurðpunktinn.



### 3. Að flytja inn og vista sérsniðin verkfæri



#### Vistið verkfærið

1. Smellið á  *Vinna með verkfæri...* í *Verkfæri*. Þá opnast gluggi.
2. Veljið sérsniðna verkfærið *Hæð* af verkfæralistanum.
3. Smellið á hnappinn *Vista sem...* til að vista verkfærið.
4. Veljið nafn á verkfærið (t.d. *Haed\_verkfaeri.ggt*) og vistið á tölvunni ykkar.

Ath: Sérsniðin GeoGebruverkfæri eru vistuð með viðskeytinu *.ggt*. Þannig er hægt að greina á milli ‚venjulegra‘ GeoGebruskraá (nafnauki *.ggb*) og sérsniðinna verkfæra.

#### Að flytja inn sérsniðin verkfæri

Þegar sérsniðna verkfærið hefur verið vistað er hægt að nota það í aðrar smíðar. Sérsniðin verkfæri birtast ekki á verkfærastikunni þegar GeoGebra er opnað. Ef nota á sérsniðið verkfæri, verður að flytja það inn í GeoGebruskraána.

1. Opnið nýjan GeoGebruglugga (*Skrá* –  *Nýr gluggi*).
2. Í valmyndinni *Skrá* smellið á  *Opna*.
3. Veljið verkfærið (t.d. *Haed\_verkfaeri.ggt*).
4. Smellið á *Open* hnappinn og flytjið þannig verkfærið á verkfærastikuna í GeoGebruglugganum.

Athugasemd: Það hefur ekki áhrif, á smíð sem verið er að vinna með, að flytja inn sérsniðin verkfæri og því er hægt að flytja þau inn á meðan á smíði stendur.

### 4. Að búa til ferningsverkfæri

#### Undirbúningur

- Opnið nýja GeoGebruskraá.
- Felið algebrugluggann, inntaksreitinn og ásana (*Skóða*).
- Hakið við *Allir nýir hlutir* (*Valkostir* – *Merkingar*).



## Leiðbeiningar

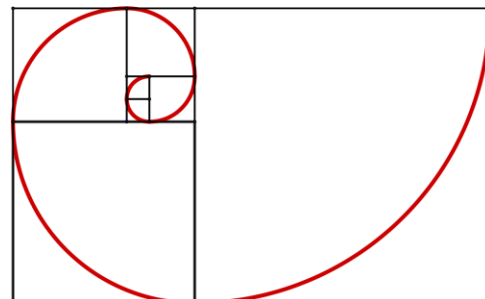
1		Línustrik $a$ milli $A$ og $B$ .
2		Hornrétt lína $b$ á línustrik $a$ í gegnum punkt $B$ .
3		Hringur $c$ með miðju í punktinum $B$ gegnum punktinn $A$ .
4		Skurðpunktur, hringsins $c$ og línunnar $b$ , $C$ .
5		Samsíða lína $d$ við línu $b$ í gegnum punktinn $A$ .
6		Samsíða lína $e$ við línustrik $a$ í gegnum punktinn $C$ .
7		Skurðpunktur, línanna $d$ og $e$ , $D$ .
8		Ferningur $ABCD$ .
9		Felið alla hjálparhluti (línur og hring).
10		Felið merki allra hluta.
11		Breytið lit ferningsins í svartan og stillið fyllinguna á 0%.
12		Búið til ferningsverkfæri ( <i>Verkfæri – Búa til nýtt verkfæri...</i> ). <u>Úttakshlutir:</u> ferningur, hliðar fernings, punktar $C$ og $D$ <u>Setja inn hluti:</u> punkta $A$ og $B$ <u>Nafn:</u> Ferningur <u>Stikuhjálp:</u> Smellið á tvo punkta
13		Vistið verkfærið undir nafninu <i>Ferningsverkfæri.ggt</i> <u>Ábending:</u> Valmynd <i>Verkfæri – Vinna með verkfæri... – Vista sem...</i>

## Viðfangsefni

Berið saman þennan smíðaferil og þann sem notaður var í vinnublaði 2. Hver er munurinn?

## 5. Fibonacci kuðungurinn

*Fibonacci kuðunginn* er hægt að búa til með því að draga boga á milli mótlægra horna í ferningum sem raðað er upp eins og myndin sýnir. Stærð ferninganna fylgir Fibonaccirunu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...






*Fibonacci kuðungurinn* nálgast hinn *Gullna kuðung* en hann er lograkuðungur með vaxtarstuðul nálægt gullinsniði.

## Undirbúningur






- Opnið nýjan GeoGebruglugga.
- Flytjið ferningsverkfærið inn á verkfærastikuna (*Skrá – Opna*).
- Felið algebrugluggann, inntaksreitinn og ásana (*Skoða*).
- Hakið við *Grind* (*Skoða*).
- Hakið við *Engir nýir hlutir* (*Valkostir – Merkingar*).

## Kynning á nýju verkfæri

	<b>Hringbogi skilgreindur út frá miðju og tveimur punktum</b>	<b>Nýtt!</b>
<p><u>Ábending:</u> Smellið á miðju hringbogans. Veljið síðan tvo punkta sem skilgreina geisla og lengd bogans.</p>		

Ábendingar: Lesið stikuhjálpinna ef óljóst er hvernig nota á verkfæri. Prófið verkfærið áður en það er notað í smíði.

## Leiðbeiningar

1		<p>Notið ferningsverkfærið til að búa til ferning með hliðarlengd 1</p> <p><u>Ábending:</u> Látið punktana tvo vera á samliggjandi hnitpunktum á grind.</p>
2		<p>Búið til annan eins ferning undir þeim fyrri.</p> <p><u>Ábending:</u> Endurnýtið punkta þannig að ferningarnir snertist.</p>
3		<p>Búið til þriðja ferninginn með hliðarlengd 2 við hliðina á ferningum eitt og tvö.</p>
4		<p>Haldið áfram að búa til ferninga með hliðarlengdir 3, 5, 8 og 13. Raðið þeim rangsælis upp.</p>
5		<p>Búið til hringboga innan fyrsta ferningsins.</p> <p><u>Ábending:</u> Látið hægra hornið niðri vera miðju hringbogans, látið svo hægra hornið uppi og vinstra hornið niðri vera punktana tvo sem skilgreina bogann.</p>
6		<p>Endurtakið skref 5 í öllum ferningum og fáið þannig fram Fibonacci spírallinn.</p>
7		<p>Notið <i>Eiginleika</i> til að bæta smíðina (til dæmis breyta lit eða gerð línu).</p>





## 6. Að smíða miðju hrings

### Aftur í skólann...

Vitið þið hvernig á að finna miðju hrings? Notið hringina (sjá öftustu blaðsíðu þessa vinnublaðs) sem kennarinn lætur ykkur fá (4 á mann) og reynið að finna miðju þeirra (a) með því að brjóta blaðið saman (b) með blýanti og reglustiku.

#### Ábendingar:







- Leið 1a: Brjótið blaðið þannig að tvö þvermál hringsins skerist í miðju hans.
- Leið 1b: Getið þið endurtekið þessa smíð með blýanti og reglustiku?
- Leið 2a: Brjótið blaðið til að mynda tvo strengi hringsins ásamt miðpverli þeirra. Skurðpunktur miðpverlanna er í miðju hringsins.
- Leið 2b: Getið þið endurtekið þessa smíð með blýanti og reglustiku?

Notið nú GeoGebru til að endurtaka smíðina í (2b).



### Undirbúningur

- Opnið nýja GeoGebruskrá.
- Felið ásana og algebrugluggann en sýnið inntaksreitinn (*Skoða*).

### Leiðbeiningar

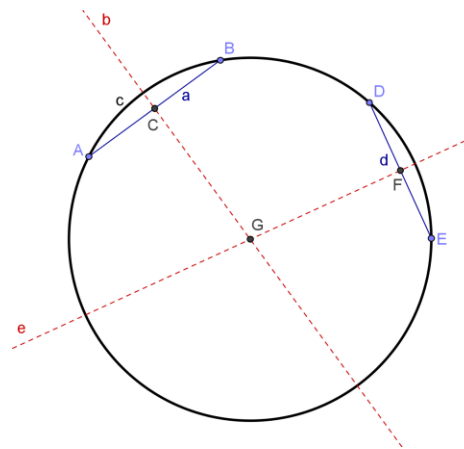
1	Sláið inn jöfnu hringsins $c: x^2 + y^2 = 16$
2	 Búið til streng $a$ í hringnum $c$ <u>Ábending:</u> Strengur er línustrik með endapunkta á hringnum.
3	 Búið til miðpunkt $C$ á strengnum $a$ .
4	 Búið til línu $b$ sem er hornrétt á strenginn $a$ og gengur gegnum $C$ . <u>Ábending:</u> $b$ er miðpverill strengsins $a$ .
5	 Búið til annan streng $d$ í hringnum $c$ .
6	 Merkið inn miðpunkt $F$ á strengnum $d$ .
7	 Búið til línu $e$ sem er hornrétt á strenginn $d$ og gengur gegnum $F$ .



8		Finnið skurðpunkt, G, línanna <i>b</i> og <i>e</i> .
9		Notið <i>Eiginleika</i> til að bæta smíðina (til dæmis breyta lit eða gerð línu).
10		Sannreynið smíðina með því að færa strengina til.

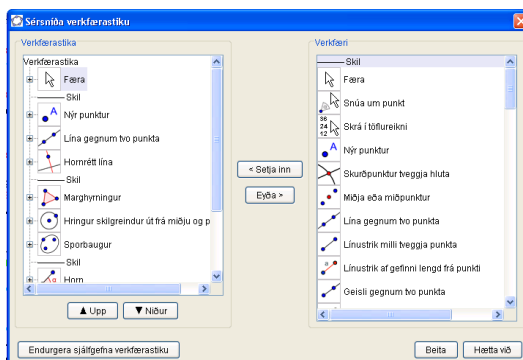
## Viðfangsefni

- Hakið við *Myndsmíðarspilari* (*Skoða*) smellið á Spila til að skoða öll skref myndsmíðarinnar.
- Setjið rofstaði inn í *Verklýsingu myndsmíðar* til að safna saman nokkrum skrefum í myndsmíðinni (opnaðu *Verklýsing myndsmíðar Skoða – Rofstaður*). Þegar þið hafið valið rofstaði, hakið þá við *Sýna bara rofstaði*.
- Flytjið smíðina út sem kvikt vinnublað, html. Hakið við *Sýna valmynd* undir flípanum *Meira* í valglugganum. Vistið skrána undir nafninu *Midja\_hrings1.html*.
- Opnið kvika vinnublaðið og skoðið *Verklýsingu myndsmíðar* til að rifja upp og skrifið hjá ykkur hvaða hlutir voru notaðir við smíðina.



## 7. Að sérsníða verkfærastiku

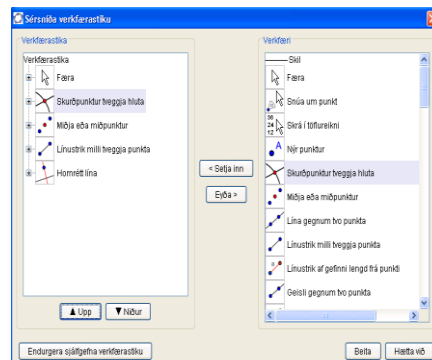
Núna er sýnt hvernig sérsníða má verkfærastikuna til að takmarka aðgang nemenda að verkfærum.



1. Í *Verkfærum* smellið á *Sérsníða verkfærastiku*...



2. Í glugganum vinstra megin eru öll verkfærin sem eru sjálfgefin á verkfærastikunni. Ef smellt er á + táknið fyrir framan nafnið opnast verkfærakassi með fleiri verkfærum. Í glugganum hægra megin eru öll verkfæri sem til eru í GeoGebra.
3. Veljið orðið *Skil* í vinstri glugganum. Smellið á *Eyða* hnappinn nokkrum sinnum þar til aðeins *Færa* er eftir í glugganum.
4. Smellið á + táknið fyrir framan *Færa* til að opna verkfærakassann. Veljið *Snúa um punkt* og smellið á *Eyða* hnappinn tvisvar. *Færa* ætti núna að vera eina verkfærið í vinstri glugganum.
5. Lokið *Færa* verkfærakassanum í vinstri glugganum með því að smella á – táknið.
6. Veljið *Skurðpunktur tveggja hluta* í hægri glugganum og smellið á < *Setja inn*.
7. Endurtakið skref 6 fyrir öll þau verkfæri sem þarft til að smíða miðju hrings (*Miðja eða miðpunktur*, *Línustrik milli tveggja punkta*, *Hornrétt lína*).
8. Notið *Upp* og *Níður* hnappana til að breyta röð verkfæranna í vinstri glugganum.
9. Smellið á *Beita* þegar þið eruð búin.
10. Nú ætti sérsniðna verkfærastikan að blasa við.



## Viðfangsefni

- Eyðið öllum hlutum nema hringnum.
- Flytjið þessa nýju smíð út sem kvikt vinnublað (valmynd *Skrá*) sem inniheldur sérsniðna verkfærastikuna og stikuhjálp (gluggi *Flytja út* – flipi *Meira*).
- Vistið kvika vinnublaðið undir nafninu *Midja\_hrings.html*.



## 8. Áskorun dagsins: Uppgötvun Eulers

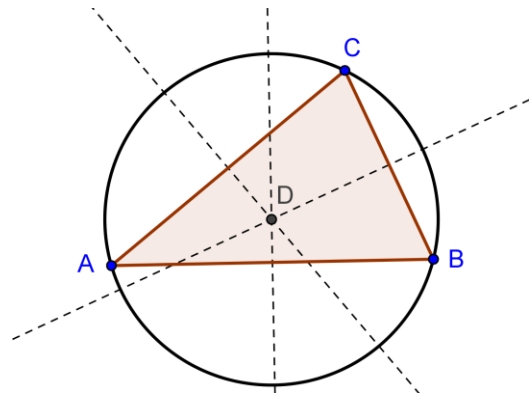
### Viðfangsefni

- Smíðið eftirfarandi þrjá punkta þríhyrnings: ummiðju, hæðaskurðpunkt og þungamiðju. Búið til og vistið sérsniðin verkfæri fyrir hvern þessara punkta.
- Notið sérsniðnu verkfærin til að finna sambandið á milli punktanna þriggja eins og svissneski stærðfræðingurinn Euler gerði á 18. öldinni (án þess að hafa kvikt rúmfræðiforrit við höndina ;-)

### Ummiðja þríhyrnings

#### Undirbúningur

- Opnið nýja GeoGebruskrá.
- Felið algebruggann, inntaksreitinn og ásana (Skoða).
- Hakið við *Nýir punktar eingöngu* (Valkostir – Merkingar).



#### Leiðbeiningar

1		Þríhyrningur $ABC$
2		Miðþverill $d$ , $e$ , og $f$ fyrir allar hliðar þríhyrningsins <u>Ábending:</u> Verkfærið <i>Miðþverill</i> er hægt að nota á línustrik sem búið er að teikna.
3		Skurðpunktur tveggja þverla, $D$ . <u>Ábending:</u> Verkfærið <i>Skurðpunktur tveggja hluta</i> er ekki hægt að nota fyrir skurðpunkt þriggja lína. Veljið annað hvort tvær línanna eða smellið á skurðpunkt og veljið eina línu í einu úr lista sem birtist.
4		Hringur skilgreindur út frá $D$ og einum af hornpunktum þríhyrningsins $ABC$
5		Endurnefnið punktinn $D$ <i>Ummiðja</i> .
6		Notið <i>Færa</i> til að sannreyna smíðina.
7		Búið til sérsniðið verkfæri fyrir ummiðju þríhyrnings.
<u>Úttakshlutir:</u> punktur <i>Ummiðja</i> <u>Setja inn hluti:</u> punktar $A$ , $B$ og $C$ <u>Nafn:</u> <i>Ummiðja</i>		



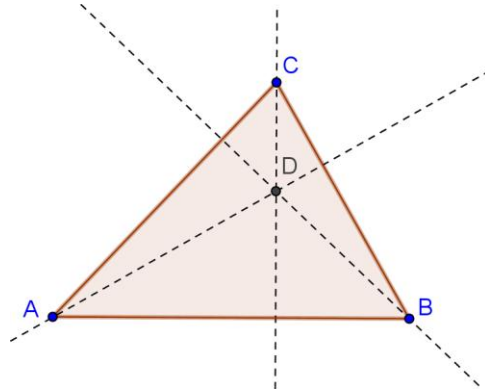
Stikuhjálp: Smellið á þrjá punkta

8 Vistið sérsniðna verkfærið undir nafninu *ummidja.ggt*.

### Hæðapunktur þríhyrnings

#### Undirbúningur

- Opnið nýja GeoGebruskrá.
- Felið algebrugluggann, inntaksreitinn og ásana (*Skoða*).
- Hakið við *Nýir punktar eingöngu* (*Valkostir – Merkingar*).



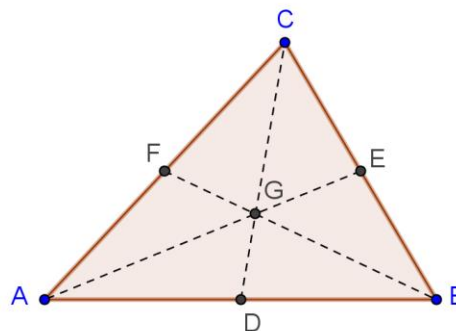
#### Leiðbeiningar

1		Þríhyrningur <i>ABC</i>
2		Hornréttar línur <i>d</i> , <i>e</i> og <i>f</i> á hverja hlið þríhyrningsins í gegnum mótlægan hornpunkt.
3		Skurðpunktur tveggja lína (t.d. <i>e</i> og <i>f</i> ), <i>D</i> .
4		Endurnefnið <i>D</i> Hæðaskurðpunktur.
5		Notið <i>Færa</i> til að sannreyna smíðina.
6		Búið til sérsniðið verkfæri fyrir hæðaskurðpunkt þríhyrnings. <u>Úttakshlutir</u> : punktur <i>Hæðaskurðpunktur</i> <u>Setja inn hluti</u> : punktar <i>A</i> , <i>B</i> og <i>C</i> <u>Nafn</u> : Hæðaskurðpunktur <u>Stikuhjálp</u> : Smellið á þrjá punkta
7		Vistið sérsniðna verkfærið undir nafninu <i>haedaskurdpunktur.ggt</i> .

### Þungamiðja þríhyrnings

#### Undirbúningur

- Opnið nýja GeoGebruskrá.
- Felið algebrugluggann, inntaksreitinn og ásana (*Skoða*).
- Hakið við *Nýir punktar eingöngu* (*Valkostir – Merkingar*).





## Leiðbeiningar

1		Þríhyrningur $ABC$
2		Miðpunktar $D$ , $E$ og $F$ á hliðum þríhyrningsins.
3		Línustrik $d$ , $e$ og $f$ milli hvers miðjupunkts og mótlægs hornpunkts.
4		Skurðpunktur tveggja línustrika, $G$ .
5		Endurnefnið punktinn $G$ <i>Þungamiðja</i> .
6		Notið <i>Færa</i> til að sannreyna smíðina.
7		Búið til sérsniðið verkfæri fyrir þungamiðju þríhyrnings. <u>Úttakshlutir:</u> punktur <i>Þungamiðja</i> <u>Setja inn hluti:</u> punktar $A$ , $B$ og $C$ <u>Nafn:</u> Þungamiðja <u>Stikuhjálp:</u> Smellið á þrjá punkta.
8		Vistið sérsniðna verkfærið undir nafninu <i>tungamidja.ggt</i> .

## Hver var uppgötvun Eulers?

### Viðfangsefni 1

- Opnið nýja GeoGebruskrá og flytjið inn á verkfærastikuna sérsniðnu verkfærin (*ummidja.ggt*, *haedapunktur.ggt* og *tungamidja.ggt*).
- Búið til þríhyrning  $ABC$  og notið verkfærin á hann til að búa til ummiðju, hæðapunkt og þungamiðju.
- Flytjið hornpunkta þríhyrningsins til að sjá sambandið milli ummiðju, hæðapunkts og þungamiðju. Notið rúmfræðiverkfæri úr GeoGebru til að sjá sambandið milli punktanna.

### Viðfangsefni 2

- Opnið nýja GeoGebruskrá. Sérsníðið verkfærastikuna þannig að á henni séu eftirfarandi verkfæri: *Færa*, *Marghyrningur*, *Lína gegnum tvo punkta*, *Hringur skilgreindur út frá miðju og punkti*, *Ummidja*, *Haedapunktur* og *Tungamidja*.
- Flytjið skrána út sem kvikt vinnublað. Semjið leiðbeiningar sem hjálpa nemendum að uppgötva Euler línu þríhyrnings.



**Að smíða miðju hrings. Vinnublað**

