Háskóli Íslands
Raunvísindadeild

4. maí 2009

GeoGebra

Stærðfræði í framhaldsskólum

Leiðbeinandi:
Freyja Hreinsdóttir

Hlín Ágústsdóttir
(hlin.agusts@gmail.com)

Efnisyfirlit

1 Línuföll

Þetta verkefni er ætlað námskeiðunum STÆ 203 og 263 og krefst engrar þekkingar á GeoGebra af hálfu nemandans. GeoGebra forritin sem notuð eru við að leysa verkefnið eru einföld í smíði og krefjast aðeins grunnþekkingar hjá kennara til að útfæra en einnig er hægt að yfirfæra þau á html og setja á netið.

Verkefnið um línuföll á að hjálpa nemandanum að skilja muninn á þremur mismunandi jöfnum lína,

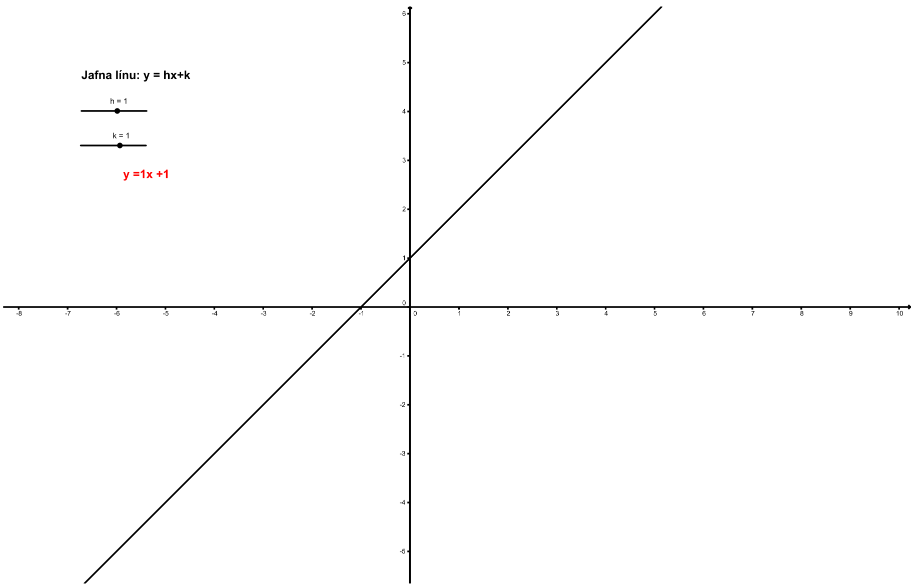
$$y = hx + k, \tag{1}$$
$$y - q = h(x - p), \tag{2}$$
$$ax + by = c, \tag{3}$$

og hvaða upplýsingar hver jafna gefur okkur um línufallið og hvað sérhver fasti stendur fyrir. Með því að nota GeoGebra sér nemandinn myndrænt hvernig línan breytist við það að breyta sérhverjum fasta og gæti gefið þannig dýpri skilning á virkni sérhvers fasta. Einnig getur verkefnið hjálpað nemandanum að skilja betur að sérhverja línu er hægt að skrifa með öllum þremur jöfnunum og myndræn framsetning GeoGebra á þeim gæti auðveldað skilning á því hvaða jöfnu skal nota hverju sinni eftir því hvaða upplýsingar eru gefnar, þegar finna á jöfnu línufalls.

Verkefnið skoðar einnig láréttar og lóðréttar línur og jöfnur þeirra. Nemendur eiga oft erfitt með að átta sig á því hvenær lína er lárétt eða lóðrétt útfrá jöfnum þeirra en með því sjá myndrænt hvaða ás línan er að skera og sjá hvernig hnit nokkurra punkta á línunum haga sér þegar línan er færð til, gæti auðveldað nemandanum að átta sig á jöfnum línanna.

Línuföll með GeoGebra

1. Skoðið GeoGebra skjalið lína1.ggb.



(a) Setjið $h = 1$ og $k = 1$. Fyllið inní töfluna með því að breyta h og lesa af fallinu.

h	$y = hx + k$
-2	
-1	
0	
1	
2	

(b) Hvernig breytist línufallið við að breyta h?

(c) Hver er munurinn á línunni við jákvætt h annars vegar og neikvætt h hins vegar?

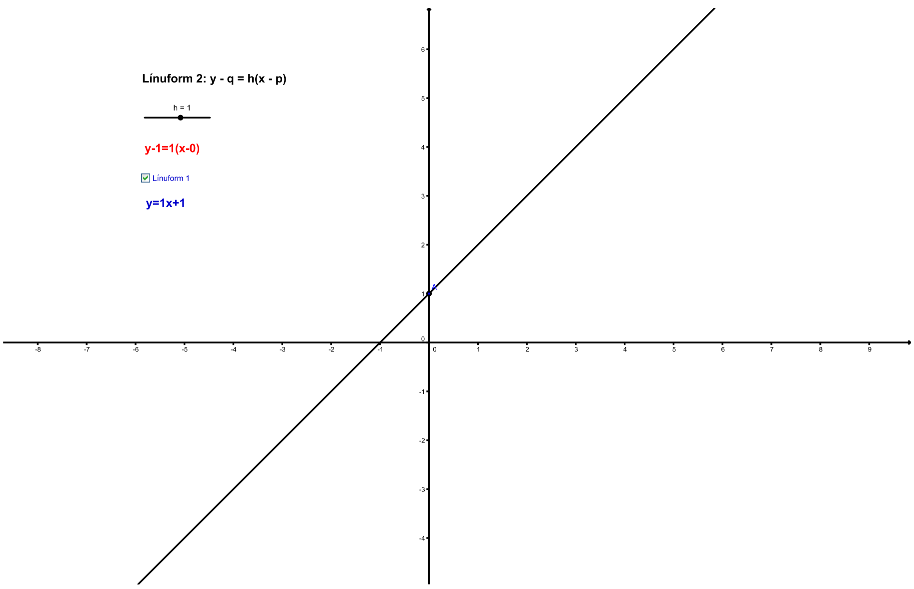
(d) Setjið nú aftur $h = 1$. Fyllið inní töfluna með því að breyta k og lesa af fallinu.

k	$y = hx + k$
-2	
-1	
0	
1	
2	

(e) Hvernig breytist línufallið við að breyta k?

(f) Hvaða upplýsingar veita fastar h og k um línuna?

2. Skoðið GeoGebra skjalið lína2.ggb.



(a) Setjið $h = 1$ og takið hakið af Línuform 1. Fyllið inní töfluna með því að breyta h og lesa af fallinu.

h	$y - q = h(x - p)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

(b) Hvernig breytist línufallið við að breyta h?

(c) Hver er munurinn á línunni við jákvætt h annars vegar og neikvætt h hins vegar?

(d) Setjið nú aftur $h = 1$. Fyllið inní töfluna með því að breyta punktinum $A(p, q)$ og lesa af fallinu.

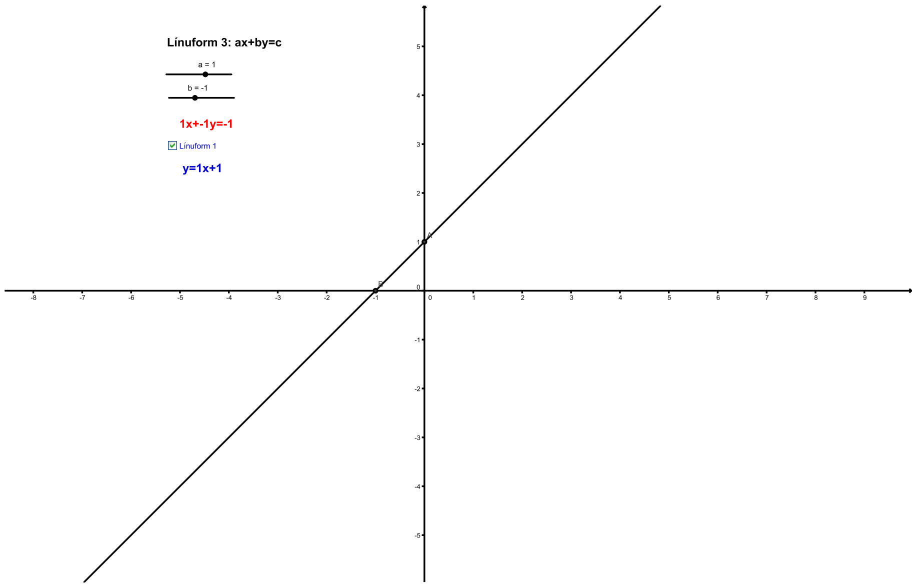
$A(p, q)$	$y - q = h(x - p)$
(-2,-1)	
(-1,0)	
(0,0)	
(0,1)	
(3,2)	

(e) Hvernig breytist línufallið við að breyta punktinum A?

(f) Hvaða upplýsingar veita fastar h, p og q um línuna?

(g) Teiknið nú línuna $y - 2 = -2(x + 4)$ í GeoGebra skjalinu. Yfirfærið nú þessa jöfnu yfir á línuform 1 (sýnið útreikninga) og athugið svarið með því að haka við Línuform 1.

3. Skoðið GeoGebra skjalið lína3.ggb.



(a) Setjið $a = -1$, $b = 1$ og takið hakið af Línuform 1. Fyllið inní töfluna með því að breyta a og lesa af fallinu.

a	$ax + by = c$
-2	
-1	
0	
1	
2	

(b) Hvað breytist á línufallinu við að breyta a?

(c) Setjið nú aftur $a = -1$. Fyllið inní töfluna með því að breyta b og lesa af fallinu.

b	$ax + by = c$
-2	
-1	
0	
1	
2	

(d) Hvað breytist á línufallinu við að breyta b?

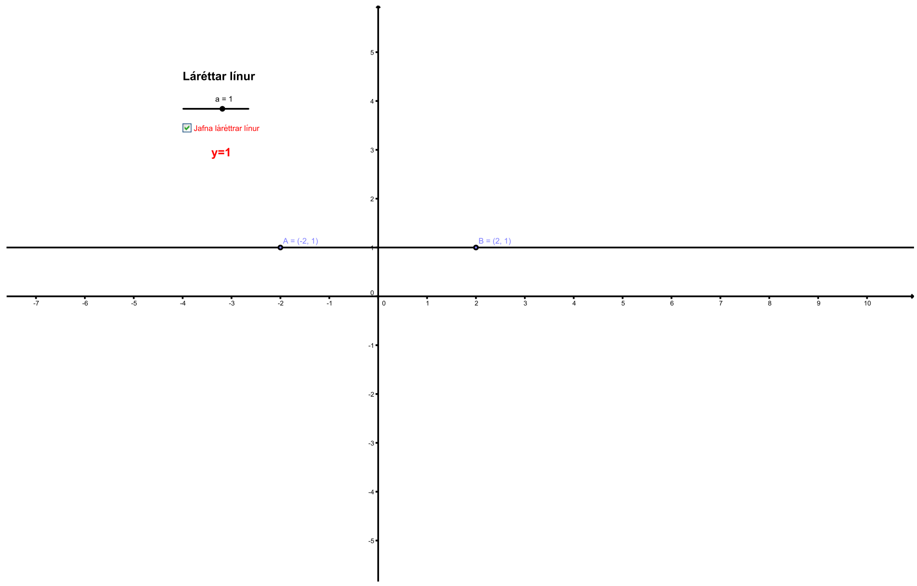
(e) Hvað er sérstakt við punkta A og B? Þeir hafa ákveðið heiti.

(f) Getið þið séð út hvert samband fasta a og b er við fasta c?

(g) Teiknið nú línuna $2x - y = -2$ í GeoGebra skjalið. Yfirfærið nú þessa jöfnu yfir á línuform 1 (sýnið útreikninga) og athugið svarið með því að haka við Línuform 1.

(h) Hvert er samband a og b við hallatölu línunnar? Hver er skurðpunktur y-ássins? Ritið jöfnu línunnar á línuform 1 m.t.t. a og b.

4. Skoðið GeoGebra skjalið lálína.ggb.



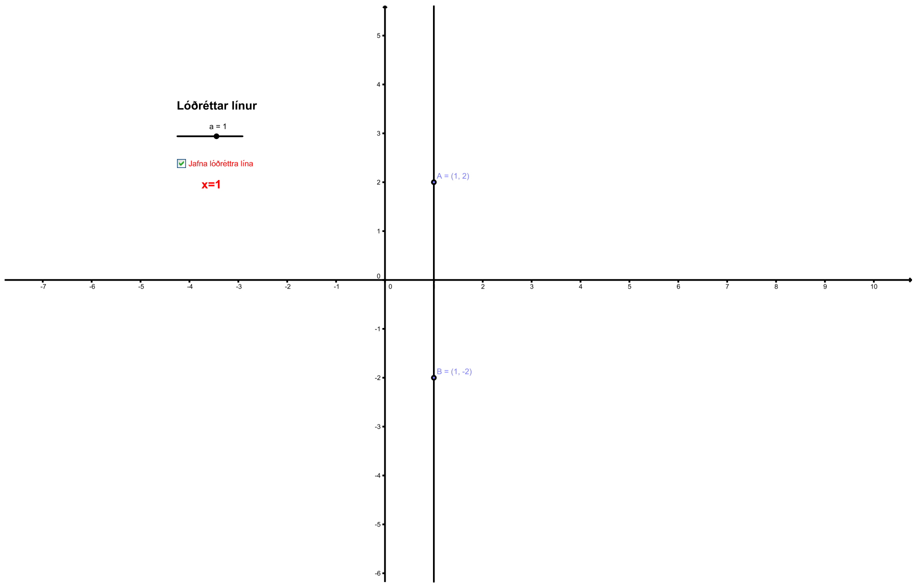
(a) Hvaða ás sker lárétta línan?

(b) Setjið $a = 1$ og hafið ekki hakað í Jafna láréttrar línu. Færið punkt A til á línunni. Hvað eiga gildi hnita A sameiginlegt á línunni?

(c) Útfrá svörum ykkar í a) og b) lið, getið þið sagt til um hver jafna línunnar er? Hakið í Jafna láréttrar línu til að kanna svar ykkar. Breytið a til að sjá hvernig jafnan breytist.

(d) Setjið $a = 1$ og reiknið hallatölu línunnar með því að nota punkta A og B á línunni. Setjið nú $a = 2$ og reiknið aftur hallatöluna. Hvað getið þið útfrá þessum niðurstöðum áætlað um hallatölu láréttra lína?

5. Skoðið GeoGebra skjalið lóðlína.ggb.



(a) Hvaða ás sker lóðrétta línan?

(b) Setjið $a = 1$ og hafið ekki hakað í Jafna lóðréttrar línu. Færið punkt A til á línunni. Hvað eiga gildi hnita A sameiginlegt á línunni?

(c) Útfrá svörum ykkar í a) og b) lið, getið þið sagt til um hver jafna línunnar er? Hakið í Jafna lóðréttrar línu til að kanna svar ykkar. Breytið a til að sjá hvernig jafnan breytist.

(d) Setjið $a = 1$ og reiknið hallatölu línunnar með því að nota punkta A og B á línunni. Setjið nú $a = 2$ og reiknið aftur hallatöluna. Hvað getið þið útfrá þessum niðurstöðum áætlað um hallatölur lóðréttra lína?

2 Fleygbogar

Þetta verkefni er ætlað námskeiðunum STÆ 203 og 263 og krefst fyrri partur verkefnisins engrar þekkingar á GeoGebra af hálfu nemandans en síðari parturinn krefst grunnþekkingar á forritinu. GeoGebra forritin sem notuð eru við að leysa verkefnið eru annars vegar forrit sem einföld eru í smíði og krefjast aðeins grunnþekkingar hjá kennara til að útfæra en einnig er hægt að yfirfæra þau á html og setja á netið, og hins vegar forrit af wikipedia síðu GeoGebra.

Þetta verkefni sinnir sama tilgangi og verkefnið um línuföll nema nú á að hjálpa nemandanum að skilja muninn á þremur mismunandi jöfnum fleygboga,

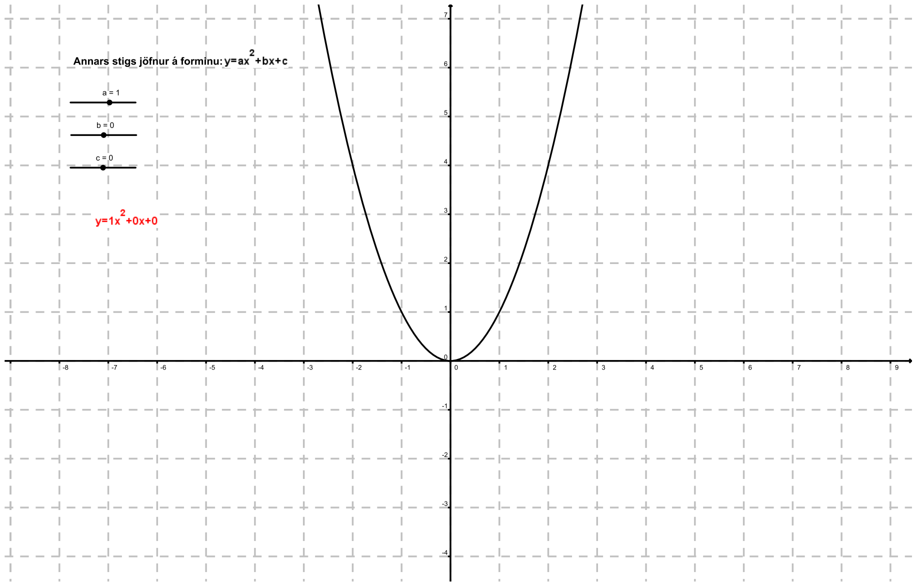
$$y = ax^2 + bx + c, \tag{4}$$
$$y = a(x+u)^2 + v, \tag{5}$$
$$y = a(x-r_1)(x-r_2), \tag{6}$$

og hvaða upplýsingar hver jafna gefur okkur um fleygbogann og hvað sérhver fasti stendur fyrir. Einnig er jafna (5) borin saman við grunnjöfnu fleygboga, $y = ax^2$, til að fá nemandann til að átta sig á því að aðeins er um hliðrun á topppunkti að ræða og sést það best með því að skoða breytinguna í GeoGebra.

Í lok verkefnisins er tekið eitt dæmi um fleygboga og nemandinn beðinn um að teikna hann, fyrst með aðstoð útreikninga og nota svo GeoGebra til að athuga hvort útreikningarnir séu réttir með því að teikna fyrst þær upplýsingar sem fengust með útreikningum í GeoGebra og teikna svo fleygbogann og athuga hvort hann stemmi við útreikninga. Þetti gæti hjálpað nemandanum að sjá betur hvort útreikningar sínir séu réttir og fá betri tilfinningu fyrir fleygbogum og hvernig þeir eiga að líta út. Einnig er annars stigs ójafna skoðuð, en hún er aðeins ætluð STÆ 203. Síðan er nemandinn beðinn um að setja jöfnu fleygbogans fram á öllum þremur jöfnuformunum og nota svo GeoGebra forrit af wikipedia til þess að bera saman jöfnurnar og sjá hvort sami fleygboginn fáist ekki. Þetta gæti hjálpað nemandanum að fá betri tilfinningu fyrir jöfnunum þrem og auðveldað skilning á því hvaða jöfnu skal nota hverju sinni eftir því hvaða upplýsingar eru gefnar, þegar finna á jöfnu fleygboga.

Fleygbogar með GeoGebra

1. Skoðið GeoGebra skjalið fleyg1.ggb.



(a) Setjið $a = 1$, $b = 0$ og $c = 0$. Fyllið inní töfluna með því að breyta a og lesa af fallinu.

a	$y = ax^2 + bx + c$
-2	
-0,5	
1	
2	
4	

(b) Hvernig breytist fleygboginn við að breyta a?

(c) Hver er munurinn á fleygboganum við jákvætt a annars vegar og neikvætt a hins vegar?

(d) Setjið nú aftur $a = 1$. Fyllið inní töfluna með því að breyta b og lesa af fallinu.

b	$y = ax^2 + bx + c$
-3	
-1	
0	
1	
3	

(e) Hvað verður um fleygbogann við að breyta b?

(f) Setjið nú aftur $b = 0$. Fyllið inní töfluna með því að breyta c og lesa af fallinu.

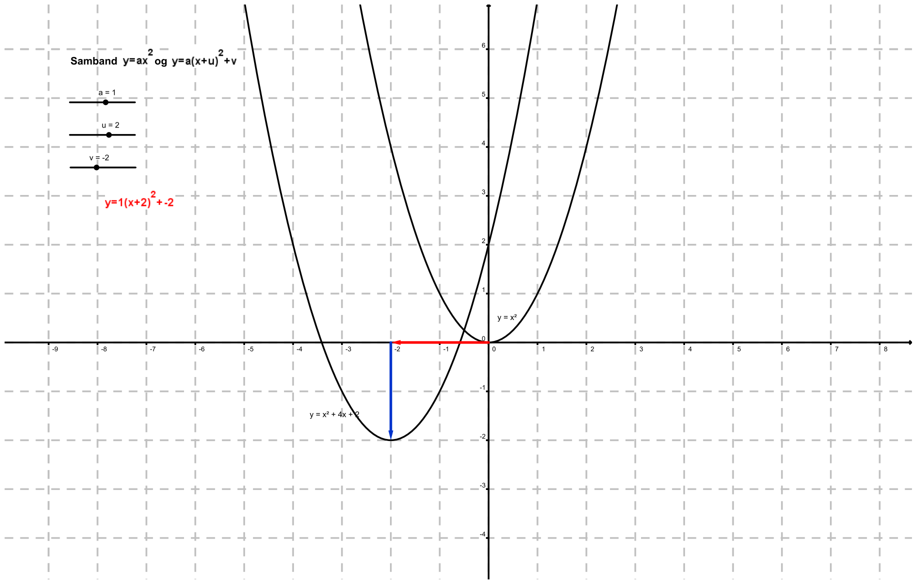
c	$y = ax^2 + bx + c$
-3	
-1	
0	
2	
4	

(g) Hvað verður um fleygbogann við að breyta c?

(h) Setjið nú $c = 2$ og prófið að breyta b. Hvaða punktur breytist ekki? Rökstyðjið af hverju.

(i) Hvað gerist ef þið setjið $a = 0$ (með t.d. $b = 1$ og $c = 1$)?

2. Skoðið GeoGebra skjalið fleyg2.ggb.



(a) Setjið $a = 1$, $u = 2$ og $v = 0$. Prófið nú að breyta a. Hver verður munurinn á fleygbogunum við að breyta a?

(b) Setjið nú $a = 1$, $u = 0$ og $v = 0$. Fyllið inní töfluna með því að breyta u og lesa af fallinu.

u	$y = a(x+u)^2 + v$
-2	
0	
2	

(c) Hvað verður um fleygbogann við að breyta u?

(d) Setjið nú $a = 1$, $u = 0$ og $v = 0$. Fyllið inní töfluna með því að breyta v og lesa af fallinu.

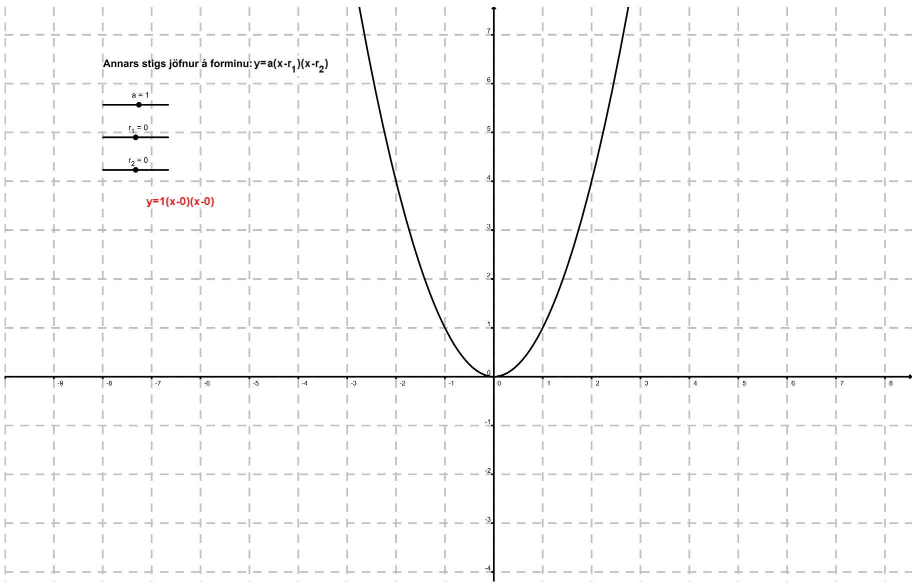
v	$y = a(x+u)^2 + v$
-2	
0	
2	

(e) Hvað verður um fleygbogann við að breyta v?

(f) Hvaða punktur hefur hnitið $(-u, v)$? (Prófið að setja $(-u, v)$ í inntaksreitinn og skoðið hvað gerist).

(g) Hver er munurinn á fleygbogunum $y = -2x^2$ og $y = -2(x+1)^2 + 4$?

3. Skoðið GeoGebra skjalið fleyg3.ggb.



(a) Setjið $a = 1$, $r_1 = 0$ og $r_2 = 0$. Fyllið inní töfluna með því að breyta r_1 og lesa af fallinu.

r_1	$y = a(x - r_1)(x - r_2)$
-3	
1	
0	
1	
3	

(b) Hvað verður um fleygbogann við að breyta r_1?

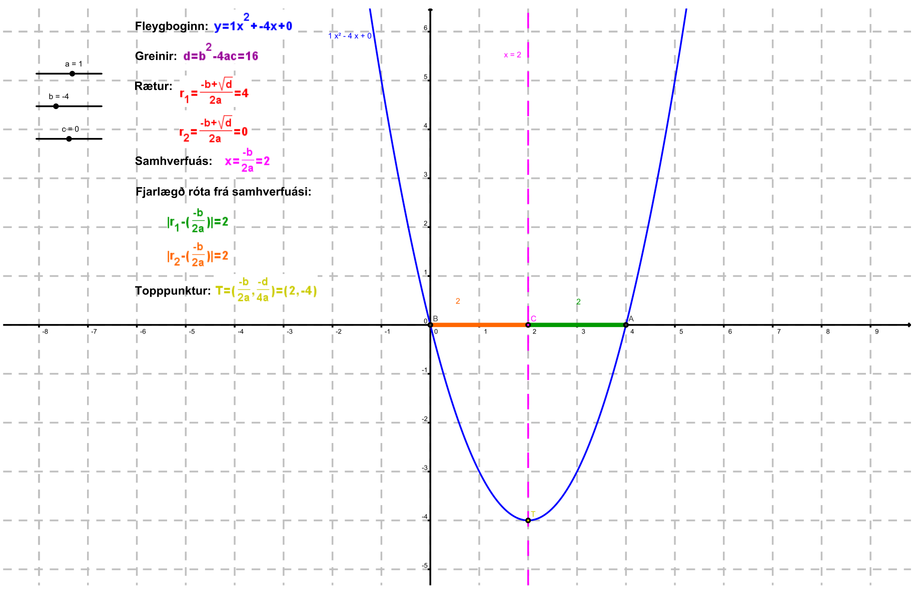
(c) Setjið nú aftur $r_1 = 0$. Fyllið inní töfluna með því að breyta r_2 og lesa af fallinu.

r_2	$y = a(x - r_1)(x - r_2)$
-3	
1	
0	
1	
3	

(d) Hvað verður um fleygbogann við að breyta r_2?

(e) Setjið nú $r_1 = 2$ og prófið að breyta r_2. Hvaða punktur breytist ekki? Rökstyðjið af hverju.

4. Skoðið GeoGebra skjalið fleyg4.ggb.



(a) Fyllið inní töfluna með því að breyta föstunum a, b og c og skráið hver fjarlægð róta frá samhverfuásnum er.

$y = ax^2 + bx + c$	$\lvert r_1 - (\frac{-b}{2a})\rvert$	$\lvert r_2 - (\frac{-b}{2a})\rvert$
$y = ax^2 - 3x - 4$		
$y = 4x^2 + 6x - 4$		
$y = -2x^2 + 8x$		
$y = -x^2 + 2x + 4$		

(b) Hvað upplýsingar gefur taflan ykkur um fjarlægð róta frá samhverfuásnum?

(c) Skoðið nú fleygbogann $y = x^2 + 2x + 1$. Hver eru gildin á d, r_1 og r_2? Hver er fjarlægð róta frá samhverfuásnum? Útskýrið svör ykkar m.t.t. myndarinnar af fleygboganum.

(d) Skoðið nú fleygbogann $y = x^2 + 2x + 2$. Hver eru gildin á d, r_1 og r_2? Hver er fjarlægð róta frá samhverfuásnum? Útskýrið svör ykkar m.t.t. myndarinnar af fleygboganum.

5. Teikna skal fleygbogann $y = -2x^2 - 4x + 6$ með aðstoð GeoGebra.

(a) Byrjið á því að finna topppunkt, skurðpunkta við ása og samhverfuás. Sýnið útreikninga.

(b) Teiknið síðan punktana og samhverfuásinn sem þið fundið í a)- lið inná nýtt GeoGebra skjal.

(c) Teiknið síðan fleygbogann sjálfan inná skjalið. Notið þetta til þess að athuga hvort a)-liður var rétt reiknaður.

(d) Leysið nú ójöfnuna $-2x^2 - 4x + 6 > 0$ myndrænt með því að nota grafið sem þið fenguð í c)-lið og merkið lausnina inná grafið. Prentið út GeoGebra myndina og skilið með dæmunum. (Aðeins fyrir STÆ 203)

(e) Notið nú upplýsingarnar í a)-lið til þess að skrifa fleygbogann á formunum $y = a(x+u)^2+v$ og $y = a(x-r_1)(x-r_2)$.

(f) Notið nú http://www.geogebra.org/en/upload/files/english/Daniel_A_Kaufmann/Parabolas.html til þess að athuga hvort lausnin ykkar í e)-lið sé rétt. Prentið út myndina og skilið með dæmunum.

3 Hornaföll

Þetta verkefni er ætlað námskeiðinu STÆ 303 og krefst engrar þekkingar á GeoGebra hvorki af hálfu nemandans né kennarans. GeoGebra forritin sem notuð eru við að leysa verkefnið eru öll aðgengileg á netinu sem html skjöl.

Verkefnið gengur í fyrsta lagi út á það að útskýra hugtakið radíanar og gefa nemandanum þannig betri skilning á hvernig radíanar eru fengnir og hvert sambandið er á milli þeirra og gráðutals annars vegar og bogalengdar hins vegar. GeoGebra forritin sem notuð eru sýna tengslin á milli sínusbylgna og einingahringsins og þar hjálpar hreyfanleiki GeoGebra mikið við að auka skilning nemandans.

Í öðru lagi eru jöfnurnar $y = a\sin(bx-h)+k$ og $y = a\cos(bx-h)+k$ skoðaðar og þar geta verkefnin og hreyfanleiki myndanna hjálpað nemandanum að skilja betur virkni fastanna. Í þriðja lagi er svo sambandið milli sínusfallsina og kósínufallsins skoðað, þar sem nemandinn getur séð betur með GeoGebra að kósínusfallið er aðeins hliðrun á sínusfallinu.

<u>Hornaföll með GeoGebra</u>

1. Skoðið http://www.mathcasts.org/gg/student/trig/sine4/index.html

(a) Fyllið inní töfluna fyrir sínusfallið:

$x°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$
x, rad	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$
$\sin(x)$						
u, bogamál						

$x°$	$135°$	$150°$	$180°$
x, rad	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$
$\sin(x)$			
u, bogamál			

(b) Hvert er sambandið milli einingahringsins og sínusfallsins? Skoðið annars vegar radíana gildi hornanna, bogamál og sínusgildið á einingahringnum og hins vegar x og y hnit sínusfallsins.

2. Skoðið `http://www.mathcasts.org/gg/student/trig/cosine4/index.html`

   (a) Fyllið inní töfluna fyrir kósínusfallið:

x°	0°	30°	45°	60°	90°	120°
x, rad	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$
$\cos(x)$						
u, bogamál						

x°	135°	150°	180°
x, rad	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$	$- \cdot \pi =$
$\cos(x)$			
u, bogamál			

(b) Hvert er sambandið milli einingahringsins og kósínusfallsins? Skoðið annars vegar radíana gildi hornanna, bogamál og kósínusgildið á einingahringnum og hins vegar x og y hnit kósínusfallsins.

(c) Hvert er sambandið milli sínus og kósínus á einingahringnum? Skoðið hnit punkts P.

3. Skoðið `http://www.geogebra.org/en/upload/files/riehl/sincostan2.html` og hafið hakað við sínus en ekki kósínus. Setjið $a = 1$, $b = 1$, $h = 0$ og $k = 0$.

(a) Fyllið inní töfluna með því að breyta a og lesa af fallinu.

a	$y = a\sin(bx - h) + k$
1	
2	
3	
4	

(b) Hvernig breytist sínusfallið við að auka a?

(c) Hvað gerist ef þið setjið $a = -1$?

(d) Fyllið inní töfluna með því að breyta b og lesa af fallinu.

b	$y = a\sin(bx - h) + k$
1	
1,5	
2	
2,5	

(e) Hvernig breytist sínusfallið við að auka b?

(f) Hvað gerist ef þið setjið $b = -1$?

(g) Hvert er sambandið milli þess að hafa $a = -1$ og $b = -1$ á sínusfallinu?

(h) Fyllið inní töfluna með því að breyta h og lesa af fallinu.

h	$y = a\sin(bx - h) + k$
0	
0,5	
1	
1,5	

(i) Hvernig breytist sínusfallið við að breyta h?

(j) Fyllið inní töfluna með því að breyta k og lesa af fallinu.

k	$y = a\sin(bx-h)+k$
0	
0,5	
1	
1,5	

(k) Hvernig breytist sínusfallið við að breyta k?

4. Skoðið áfram sama GeoGebra forrit en hafið nú hakað við kósínus en ekki sínus. Setjið $a = 1$, $b = 1$, $h = 0$ og $k = 0$.

(a) Fyllið inní töfluna með því að breyta a og lesa af fallinu.

a	$y = a\cos(bx-h)+k$
1	
2	
3	
4	

(b) Hvernig breytist kósínusfallið við að auka a?

(c) Hvað gerist ef þið setjið $a = -1$?

(d) Fyllið inní töfluna með því að breyta b og lesa af fallinu.

b	$y = a\cos(bx-h)+k$
1	
1,5	
2	
2,5	

(e) Hvernig breytist kósínusfallið við að auka b?

(f) Hvað gerist ef þið setjið $b = -1$?

(g) Hvert er sambandið milli þess að hafa $a = -1$ og $b = -1$ á kósínusfallinu?

5. Hafið nú hakað við bæði sínus- og kósínusfallið.

   (a) Ef þið breytið nú fasta h þ.a. $h = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ (gildið sem kemst næst er h=1,55), hvert verður sambandið milli sínus og kósínus?

4 Riemann summur

Þetta verkefni er ætlað námskeiðinu STÆ 503 og krefst fyrri hluti verkefnisins engrar þekkingar á GeoGebra þar sem GeoGebra forritið sem notað er við að leysa verkefnið er aðgengilegt á netinu sem html skjal. Aftur á móti krefst seinni hluti verkefnisins að nemandinn hafi grunnþekkingu á GeoGebra og þekki virkni inntaksreitsins.

Markmið verkefnisins er að útskýra hvað Riemann undir- og yfirsummur eru og þar getur virkni GeoGebra forritsins hjálpað mikið uppá skilning nemandans því það sýnir hvernig summurnar nálga flatarmál undir falli á ákveðnu bili og hvernig það verður nákvæmara eftir því sem skiptingarnar verða fleiri. Einnig hjálpar það við að skilja muninn á yfir- og undirsummum.

Riemann undir- og fyrisummur með GeoGebra

1. Skoðið `http://www.geogebra.org/en/examples/integral/loweruppersum.html`

   (a) Setjið $a = -1$, $b = 1$ og $n = 1$. Fyllið inní töfluna með því að breyta n og lesa af yfir-, undirsummu og mismuninn.

n	Yfirsumma	Undirsumma	Mismunur
1			
4			
8			
12			
20			

   (b) Hvernig breytist yfir-, undirsumman og mismunurinn þegar n stækkar?

(c) Setjið $n = 6$ og prófið að færa til endapunktana a og b. Hver er munurinn á yfir- og undirsummunni? Skoðið með tilliti til rétthyrninganna og flatarmálsins.

(d) Setjið nú $n = 8$, $a = -0,5$ og $b = 1,5$. Hver er yfir-, undirsumman og mismunurinn? Er hann sá sami og fyrir $n = 8$ í a)-lið? Rökstyðjið svarið m.t.t. þess að bilið [a,b] er jafnstórt.

2. (a) Reiknið yfir- og undirsummu fallsins $f(x) = x^2$ á bilinu $[0, 2]$, miðað við 5 skiptingar.

(b) Notið nú GeoGebra og teiknið fallið $f(x) = x^2$ og setjið í inntaksreitinn LowerSum$[x\hat{}2, 0, 2, 5]$ og UpperSum$[x\hat{}2, 0, 2, 5]$. Berið svo yfir- og undirsummuna saman við svar ykkar í a)-lið. Prentið út myndina og skilið með dæmunum.

5 Heimildaskrá

1. Adams, Robert A. 2006. *Calculus : A Complete Course*, bls. 285-287. Pearson Addison Wesley, Toronto.

2. Fahlberg-Stojanovska, Linda. [án árs]. *Trigonometry with GeoGebra.* Slóðin er: `http://math247.pbworks.com/Trig-ggb-sinx`.

3. Hohenwarter, Markus. [án árs]. *Lower- und Upper Sum of a Function.* Slóðin er: `http://www.geogebra.org/en/examples/integral/loweruppersum.html`.

4. Kaufmann, Daniel A. [án árs]. *Graphing Parabolas.* Slóðin er: `http://www.geogebra.org/en/upload/files/english/Daniel_A_Kaufmann/Parabolas.html`.

5. Matherly, Athena. 2006, 6. nóvember. *Slope-Intercept Form.* Slóðin er: `http://www.geogebra.org/en/upload/files/english/Athena_Matherly/Slope_Intercept_Form/slope_intercept_form.html`.