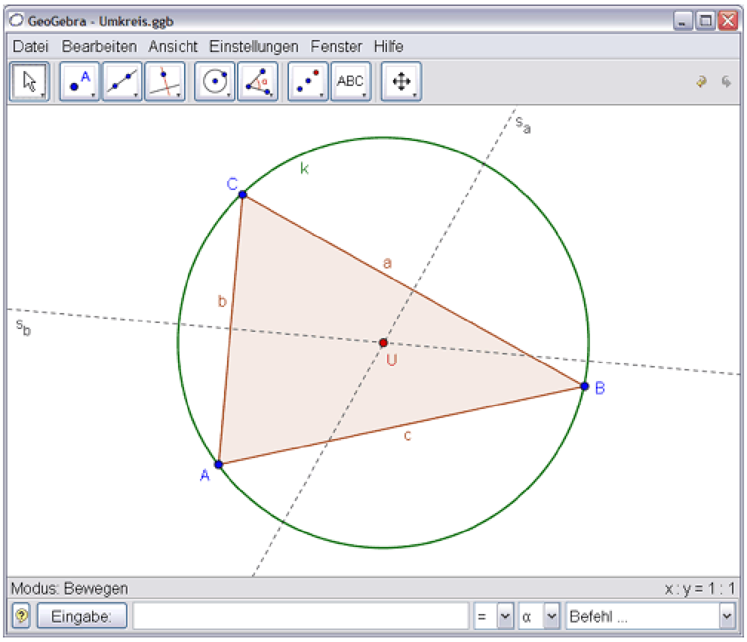
Vestmannaeyjar 17. apríl 2009
Ólafur Týr Guðjónsson
kt. 250963 2389

Áfangi: Kennsluefni í skólum
Kennarar: Eggert Briem
Freyja Hreinsdóttir

FORN FRÆÐI Á NÝRRI ÖLD



Stuðningur GeoGebra við Evklíð

Tvær megin hugmyndir ráða mestu um það hvers vegna var farið af stað í kennslu forritsins GeoGebra. Önnur er sú að nemandi fái notið fjölbreytilegra kennsluhátta og skilningur aukist með breyttri framsetningu. Hin hugmyndin er sú að kenna nemendum í fyrstu áföngum á forritið með það í huga að þeir geti unnið á eigin spýtur og nýtt sér það í frekara stærðfræðinámi. Strax kom upp í hugann að láta GeoGebra styðja við stærðfræði Evklíðs, hinn sýnilegi þáttur kennslunnar er svo mikilvægur en um leið svo vandmeðfarinn í teikningum kennarans á töflunni.

Í stærðfræðiáfanga Stæ 103, fyrsta hraðferðaráfanga í framhaldsskóla er unnið með Evklíðska rúmfræði, kynningu og útreikninga. Hægferðar nemendur fara yfir sama efni í áfanga Stæ 102 eða Stæ 122. Þrír bókaflokkar hafa einkum verið kenndir í framhaldsskólum landsins í þessum áföngum og skal nefna þá hér:

> Í kennslubók þeirra Jóns Hafsteins Jónssonar, Níels Karlssonar og Stefáns G. Jónssonar, STÆ 103 er kafli 3, *Frumhugtök rúmfræðinnar* og kafli 4 *Frumsendur og hornaföll* einkum ætlaðir til kennslu í grunnatriðum Evklíðskar rúmfræði.
>
> Í kennslubók Jóns Þorvarðarsonar, STÆ 103 er kafli 6, *Inngangur á rúmfræði* og kafli 7, *Þríhyrningar* ætlaðir í sama tilgangi
>
> Í sænskum bókaflokki eftir þá Lars-Eric Björk og Hans Brolin í þýðingu Guðmundar Jónssona, Jóns Eggerts Bragasonar, Ásgeirs Torfasonar og Jóhanns Ísaks Péturssonar sem kallast *Stærðfræði 3000* er grunnefnið tekið fyrir í kennslubók með undirtitli *Grunnbók fyrir framhaldsskóla* í kafla 4, *Rúmfræði* og kafla 5, *Algebra og rúmfræði*.

Rakin er saga Evklíðs og skrifa hans í stuttu máli í hverjum bókarflokki fyrir sig og greint frá mikilvægi afleiðslukerfisins í uppbyggingu greinarinnar. Það er ekki hægt að segja að þær taki efnið nákvæmlega sömu tökum. Lokamarkmiðið er engu að síður það sama. Í Aðalnámskrá framhaldsskóla 1999, stærðfræðihluta eru áfangamarkmið í STÆ 103 (bls. 29–32) og í STÆ 122 (bls. 37–38) meðal annars þau að nemandi geti beitt fjölbreyttum vinnubrögðum við lausn stærðfræðilegra verkefna og að nemandi þekki til kennslubókar Evklíðs, sögu hennar og áhrif á þróun stærðfræðinnar.

Einnig segir í Aðalnámskrá framhaldsskóla, stærðfræðihluta um skemmtigildi stærðfræðinnar ,,Skemmtigildið leynist m.a. í því að reyna vitsmuni sína í hæfilegum átökum við óþekkta hluti og því að sjá eitthvað snjallt og formfagurt birtast með óvæntum hætti“ (Aðalnámskrá framhaldsskóla, stærðfræði, bls 11). Fátt er betra en myndræn framsetning þegar formin birtast nemanda og þar er GeoGebra góður kostur. GeoGebra gefur einstakt tækifæri á að tengja myndræna framsetningu við ritaðan texta. Tengir tölvunotkun nútímans við forngrískan menningararf. Einstök verkefni verða vonandi til þess að nemendur fikra sig áfram á eigin spýtur.

Í drögum að nýrri menntastefnu í framhaldsskólum þá er unnið með getu-, þekkingar- og hæfnisvið sem sett eru upp í mismunandi þrep eftir stöðu nemenda hverju sinni. Á fyrsta þrepi er ætlast til að nemendur getir unnið eftir fyrirmælum en einnig að þeir geti ályktað og borið saman ólíkar leiðir sem skýra verkefni og stuðla að lausn þeirra. Vinna við GeoGebra vinnuseðla er ágæt leið til að fylgja þessum lærdómsviðmiðunum eftir. Líta má á það sem markmið útaf fyrir sig fyrir slaka nemendur að þeir læri að fylgja fyrirmælum, það er óháð því hvort einslæg horn eru á dagskrá eða eitthvað annað sem vinnuseðlarnir annars fjalla um. Nemendur fá þá tækifæri til að nýta sér margbreytilega framsetningu og notkun tölvutækni eins og kveðið er á um.

Val og rökstuðningur verkefna í GeoGebra

Hér á eftir verða rakin og skýrð nokkur verkefni sem nemendur í Stæ 103 eða Stæ 122 hafa gagn af. Þá eru einnig verkefni sem ætluð eru nemendum í Stæ 303 samkvæmt áfangalýsingu Aðalnámskrár framhaldsskóla frá árinu 1999. Vitanlega ættu allir nemendur framhaldsskólans að geta haft gagn af GeoGebra í sínu námi og vonandi einhverja skemmtun einnig. Fari kennsla í meðferð GeoGebra-forritsins af stað í grunnskóla þá eru fyrstu verkefnin allt eins gerð fyrir þann nemendahóp því Evklíðsk rúmfræði er vissulega hluti af námi þeirra.

Fyrstu þrjú verkefnin eru ætluð nemendum sem eru að kynnast GeoGebra í fyrsta sinn. Þar verður því samspilið í kennslu og notkun forritsins GeoGebra annars vegar og fræðanna sem fólgin eru í Evklíðskri rúmfræði hinsvegar að vera í jafnvægi. Eftir ofurlitla kynningu á GeoGebra-forritinu og tilsögn í meðferð flettiglugga og myndtákna ættu nemendur að vera færir um að leysa þau verkefni.

Nú er forritið GeoGebra nýtt fyrir nemendum og verður því að gera ráð fyrir undirbúningstímum, kynningu og framkvæmd einfaldra aðgerða. Að slíkri kynningu lokinni má tengja myndræna framsetningu GeoGebra við fræðilegar frumsendur og sannanir. Í því ljósi verður að lýta á verkefni 1, 2 og 3. Hugmyndin er sú að nemendur framkvæmi ákveðnar skipanir og séu leiddir að því marki sem frumsendan eða reglan segir til um. Eftir uppbyggingu er nemandinn beðinn um að huga að einhverju sérstöku og segja með eigin orðum það sem regla felur í sér. Hann hefur því „uppgötvað“ stærðfræðireglu „á eigin spýtur“. Verkefni fjögur er meðal annars ætlað til þess að sýna möguleika GeoGebra á mismunandi leiðum að sama marki. Þá er rennistika og inntaksreitur notaður til viðbótar við myndlykla. Það hvernig myndin verður notuð er ekki aðalatriðið en ánægjan yfir því að sjá myndina birtast ætti að efla nemanda í námi sínu.

Þar sem þetta eru e.t.v. fyrstu spor nemenda í GeoGebra getur verið að uppsetning forritsins trufli til að byrja með. Sem dæmi má nefna þá skráir GeoGebra punkta sjálfkrafa í stafrófsröð, A, B, C, D, o.s.frv. eftir því sem þeir eru merktir á blaðið. Sama gildir um línur, þær eru merktar í stafrófsröð, a, b, c, d, o.s.frv. Ef teikna á þríhyrning þá er allt eins líklegt að heiti horna og mótlægrar hliðar stangist á. Að uppsetningin verði ekki eins og nemendur hafa lært áður. Þetta er að sjálfsögðu atriði sem skipta sáralitlu máli í framkvæmd og ef nemendur vita hvernig forritið hegðar sér þá ætti allt annað að ganga fumlaust fyrir sig. Í framhaldinu er hægt að fara þess á leit við nemendur að þeir breyti heitum línanna eða punktanna, feli ákveðna hluti og skerpi á öðrum með mismunandi litum. Slíkt eykur þekkingu nemandans á GeoGebra forritinu og eykur vitund hans á formfegurð og skýrri framsetningu. Einnig undirstrikar það mun sem kann að vera á vinnuplaggi nemanda annars vegar en skilaverkefni hins vegar.

Síðasta verkefnið er ætlað nemendum sem lengra eru komnir og því eru fyrirmælin ekki jafn ítarleg. Þau eru ætluð nemendum í STÆ 303. Þar reynir meira á skilning nemenda á efninu sjálfu og að þeir geti notað GeoGebra sér til gagns til að auka og styrkja þann skilning. Þau verkefni eru ekki síður gagnleg kennurum við útskýringar á viðkomandi þáttum í fræðunum.

Hafi nemandi mikla reynslu í notkun GeoGebra þá verða fyrirmælin allt önnur og snúa fyrst og fremst að því að setja upp „vinnuplan” sem styður við tiltekna frumsendu, reglu eða sannanir. Vel má byggja á sama grunni og í fyrstu fjórum verkefnunum. Verkefni 1 gæti þá verið: Til er regla sem segir að einslæg horn tveggja samsíða lína eru alltaf jafnstór. Notið GeoGebra til styðja þessa reglu.

Það þarf ekki að leiða þessa nemendur í gegnum framkvæmdalýsingu. Hvernig finna skal línu í gegnum tvo punkta, finna samsíða línu í gegnum punkt utan fyrri línunnar o.s.frv. Þeir þurfa að átta sig á því að setja þarf þriðju línuna til að mynda hornin sem unnið er með. Lesa í það sem hulið er og vinna með skilgreiningar hugtaka. Þeir þurfa ekki útskýringar á einstaka framkvæmdarþáttum, þeir þurfa að láta ferlið renna mjúklega fram.

Verkefni með athugasemdum

Hér eru 5 verkefni sett fram með skýringum og hugleiðingum en eiginlegir vinnuseðlar sem ætlaðir eru nemendum fylgja í kjölfarið. Athugasemdirnar eru fyrst og fremst ætlaðar kennurum og má líta á sem kennsluleiðbeiningar. Á vinnuseðlunum eru ýmist gefin bein fyrirmæli til nemenda um næsta skref í GeoGebra-forritinu eða fyrirmælin eru almenns eðlis og nemandi þarf sjálfur að finna leiðir til að skila því sem beðið er um.

Verkefni 1 og 2 eru fyrst og fremst miðuð við nemendur sem eru að stíga sín fyrstu skref í GeoGebra en jafnframt styðja þau við ákveðið stærðfræðinám nemandans. Það sem hentar í kennslu í einum áfanga er ekki endilega vænlegt til árangurs í öðrum. Fyrstu skrefin mega vel vera hæfileg blanda af „fikti“ og „fyrirmælum“ en þegar lengra er liðið í námi þá ætti GeoGebra að vera eitt hjálpartæki sem gott er að grípa til þegar á þarf að halda.

Nám er allt eins fólgið í mistökum eins og réttri lausnarleið og ef röng leið er valin eftir íhugun og að vel athuguðu máli þá situr íhugunin og athugunin eftir þegar nemanda er beint inn á rétta braut í fyllingu tímans. Það verður að sjálfsögðu að leiðrétta misskilning eða mistúlkun en það er einnig nauðsynlegt að leyfa nemendum að *rekast á*, *feta sína leið* og *berjast á móti straumnum*. Slíkt er aðeins hluti af því vaxa upp í þjóðfélagi nútímans. Í þeim anda eru verkefni 3 og 4 sett fram. Þar er sagt hvað á að fá fram en ekki endilega hvernig. Eins og áður segir þá má líta á athugasemdirnar sem einskonar kennsluleiðbeiningar þar sem bent er á leið til úrlausnar. Kennari getur valið að setja þær fram strax í upphafi verkefnisins eða að læða inn einni og einni úrlausn eftir því sem verkefninu miðar áfram. Slíkt er vænlegra til árangurs.

Verkefni 5 er fyrir lengra komna. Það er sérstaklega ætlað nemendum í Stæ 303 sem geta nýtt sér verkefnið til að auka skilning sinn á tengslum horna og hornafalla í einingahring. Lokamyndina í þessu verkefni má allt eins nota til útskýringar án þess að nemendur hafi búið hana til. Verkefni 1– 4 leggja ríkari áherslu á aðkomu nemandans.

<u>Verkefni 1</u> , með útskýringum.

Sýnum fram á að einslæg horn við samsíða línur eru jafnstór.

Skref:

1 **Taka út ásana og hnitakerfið.** Þetta er gert þar sem frumsendan um einslæg horn stendur óháð nokkru hnitakerfi.

2 **Setja inn tvo punkta, A og B.** Hér koma sjálfkrafa hnit punktanna undir „Frjálsir hlutir“.

3 **Dragið línu í gegnum punktana A og B**. Þessa línu köllum við grunnlínu en hún verður sjálfkrafa merkt **a** við teikningu. Í framhaldinu er hægt að fara þess á leit við nemendur að þeir breyti heitum línanna eða punktanna en þess gerist ekki þörf í þessu verkefni.

4 **Teikna punkt, C, utan við grunnlínuna**. Frekari staðsetning punkts **C** er ekki gefinn upp þar sem nemandi á að geta sett hann hvar sem er utan við grunnlínu. Í lokin þá færir nemandi punkt **C** til á skjánum og þar með samsíða línu til að sannfærast um þetta atriði.

5 **Dragið línu í gegnum punkt C samsíða grunnlínu.** Þessa línu köllum við samsíða línu en hún verður sjálfkrafa merkt **b** við teikningu.

6 **Teiknið tvo nýja punkta. D á grunnlínu og E á samsíða línu.** Þetta þarf að gera til að línan í gegnum línurnar **a** og **b** verði óháðar punktunum **A**, **B** og **C** þegar þær eru færðar í lok verkefnisins.

7 **Dragið línu í gegnum punkta D og E.** Þessa línu köllum við skálínu en verður sjálfkrafa merkt **c** við teikningu. Nú koma fram einslæg horn.

8 **Veljið eitthvert horn sem skálína myndar við grunnlínu og finnið stærð þess.** Hafa skal í huga að til þess að finna horn þá þarf þrjá gefna punkta. Nemandi verður að huga vel að möguleikum sínum eða bæta inn punkti þar sem á þarf að halda.

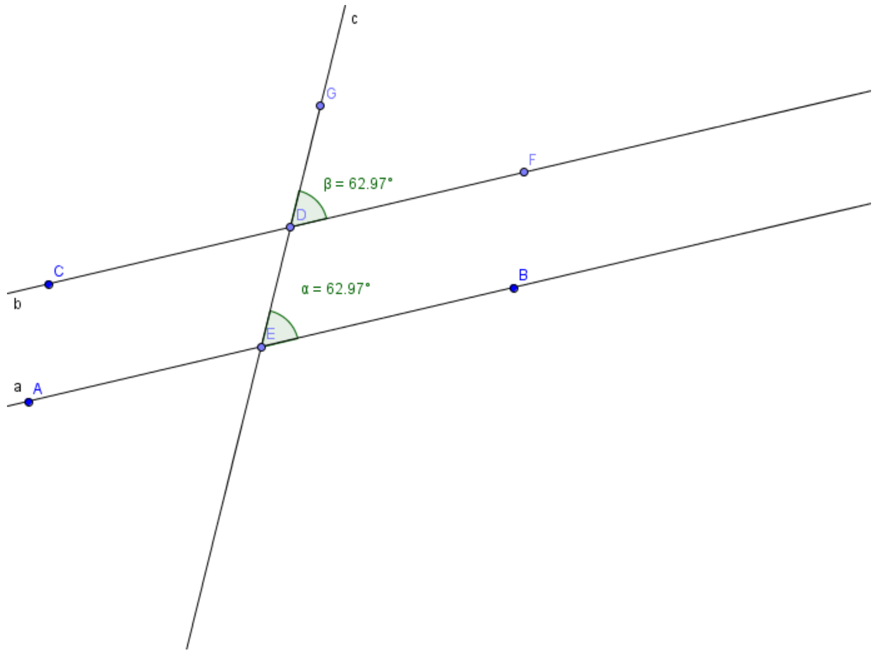
9 **Finnið stærð einslægs horns.** Sama á við um þetta skref og það næsta á undan. Til dæmis má finna eitt mögulegt horn ∠**BDE** en til þess að finna einslægt horn við það þá þarf að bæta við einum eða tveimur punktum á **b** línu og **c** línu. Í þessu verkefni

verða ekki gefin fyrirmæli um slíkt heldur látið í veðri vaka að slíkt sé nauðsynlegt og rétt fyrir nemanda að huga að slíku.

10 **Færið nú til punkt C, punkt D eða punkt E.** Nú eiga nemendur að fylgjast með stærð einslægu hornanna. Það sem ætti að vera augljóst er að stærðin verður alltaf sú hin sama. Breytist stærð annars þeirra þá breytist stærð hins einnig. Nemendur ættu því að geta orðað reglu sem að innihaldi yrði eins og fimmta frumsenda Evklíðs.

Til þess var leikurinn gerður.

Ef farið er eftir fyrirmælunum lið fyrir lið þá gæti myndin litið út:



<u>Verkefni 2</u> , með útskýringum.

Sýnum fram á að flatarmál þríhyrnings með ákveðna fasta grunnlínu og topppunkt utan við hana breytist ekki þó topppunkturinn færist eftir línu samsíða grunnlínu þríhyrningsins.

Í fyrstu bók *Frumsemdum* Evklíðs er setning 37 á þennan veg:

> „*Þríhyrningar sem hvíla á sömu grunnlínu og liggja milli sömu samsíða línanna eru jafnstórir*“ (Jón Þorvarðarson, bls. 635)

Þetta ætlum við að sýna með GeoGebra. Það er óþarfi að vera með tvo eða fleiri þríhyrninga eins og sagt er í setningunni hér að ofan því sýnileg hreyfing topppunkts og breyting myndarinnar kemur í staðin. Í Aðalnámsskrá framhaldsskóla frá 1999 segir á blaðsíðu 31 og

38 að nemendur í Stæ 103 og Stæ 122 eigi að þekkja til a.m.k. einnar sönnunar á reglu Pýþagórasar. Þær eru margar til en ef farin er leið Evklíðs þá er ofangreind regla forsenda sönnunarinnar.

Skref:

1 **Taka út ásana og hnitakerfið**. Þetta er gert þar sem reglan um flatarmál þríhyrninga stendur óháð nokkru hnitakerfi.

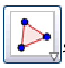
2 **Setja inn tvo punkta, A og B**. Hér koma sjálfkrafa hnit punktanna undir „Frjálsir hlutir".

3 **Dragið strik með upphafspunkt í A og endapunkt í B**. Þetta strik köllum við grunnlínu þríhyrningsins en hún verður sjálfkrafa merkt **a** við teikningu. Undir „Háðir hlutir" er lengd striksins skráð. Rétt er að ræða ofurlítið um þann mun sem er á skilgreiningu hugtakanna lína, geisli og strik við þetta tækifæri hafi það ekki verið gert áður. Einnig að tryggja nemendum sé vel kunnugt um að skilgreining og orðanotkun vísindanna sé ekki alltaf sú hin sama og almennt gengur og gerist í daglegu tali.

4 **Teikna punkt, C**, utan við grunnlínuna. Frekari staðsetning punkts **C** er ekki gefinn upp þar sem nemandi á að geta sett hann hvar sem er utan við grunnlínu.

5 **Dragið línu í gegnum punkt C samsíða grunnlínu.** Þessa línu köllum við samsíða línu en hún verður sjálfkrafa merkt **b** við teikningu.

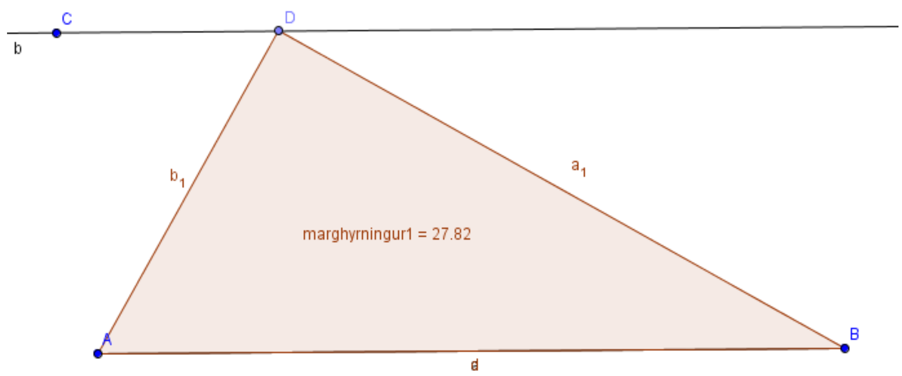
6 **Teiknið punkta D á samsíða línu.** Þetta þarf að gera til að línan **b** færist ekki þegar topppunkturinn færist og þríhyrningurinn breytir um lögun í lok verkefnisins.

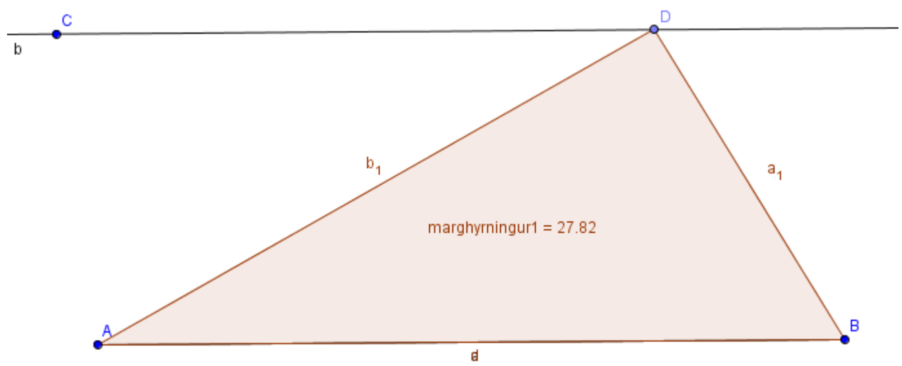
7 **Teiknið þríhyrning ΔABD.** Nú er til þess ætlast að nemandi noti tákn fyrir marghyrninga, , og muni að loka þríhyrningnum í upphafspunkti. Nú munu koma fram heiti hliðanna $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_1}$ og $\mathbf{d_1}$ þar sem þegar eru fyrir táknin **a** og **b**. Ef nafni striksins **a** er breytt strax í skrefi 3 og endurskírt t.d. „grunnlína" og nafni línu **b** breytt í skrefi 5 og endurskírt t.d. „samsíða" þá verða hliðar þríhyrningsins merktar **a**, **b** og **d**. Jafnframt kemur sjálfkrafa stærð eða flatarmál þríhyrningsins fram undir „Háðir hlutir".

8 **Færið nú til punkt D og fylgist jafnframt með stærð þríhyrningsins.** Nú eiga nemendur að fylgjast með stærð þríhyrningsins. Það sem ætti að vera augljóst er að stærðin verður alltaf sú hin sama. Ástæðan er sú að fjarlægð milli grunnlínu og

samsíða línu er alltaf það sama, m.ö.o. hæðin í þríhyrningnum er alltaf sú sama. Nemendur ættu því að geta orðað reglu sem að innihaldi yrði eins og þrítugasta og sjöunda setning í fyrstu bók Evklíðs.
Til þess var leikurinn gerður.

Ef farið er eftir fyrirmælunum lið fyrir lið þá gæti tveir þríhyrningar með sömu grunnlínu litið út:





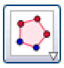
<u>Verkefni 3</u> , með útskýringum.

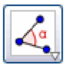
Sýnum fram á að hornasumma marghyrninga er fasti miðað við fjölda horna hverju sinni.

Skref:

1 **Takið út ásana og hnitakerfið**. Þetta er gert þar sem reglur um marghyrninga standa óháðar nokkru hnitakerfi.

2 **Setjið inn tvo punkta, A og B**. Hér koma sjálfkrafa hnit punktanna undir „Frjálsir hlutir“.

3 **Búið til jafnhliða þríhyrning í punktum A og B**. Notum táknmynd fyrir reglulega marghyrninga,  og skráið þrjú horn. Lengdir strikanna koma þá sjálfkrafa undir „Háðir hlutir“. Þar sem sést að hliðarnar eru allar jafn langar.

4 **Finnið öll horn marghyrningsins**. Ekki þarf að finna hvert horn fyrir sig heldur er nóg að nota táknmynd fyrir horn,  og smella síðan á þríhyrninginn. Nú sést að öll horn eru jafnstór.

5 **Reiknið hornasummu marghyrningsins**. Nú þarf að margfalda saman fjölda horna og stærð horns. Hér er það 3·60. Þó svo að nú sé hægt að nota 3·α þá er ekki hægt að gera það ef hornin eru fimm eða fleiri. Það er vegna þess að hornin eru gefin upp í gráðum eða radíönum og svarið er alltaf horn í fyrsta hring. Svo dæmi sé tekið þá myndu 540^{o} verða skráðar sem 180^{o} þ.e. 360 + 180.

6 **Færið nú punkt A eða punkt B til og athugið hvort breyting verður á lengdum hliðanna, flatarmáli og hornasummu**. Breyting á hliðunum verður alls staðar hin sama, flatarmál ýmist stækkar eða minnkar eftir því hvort hliðarnar lengjast eða styttast en hornasumman helst ætíð sú sama.

7 **Merkið tvo nýja punkta og teiknið ferning, athugið hornasummu hans og breytið hliðarlengd**.

8 **Merkið tvo nýja punkta og teiknið fimmhyrning, athugið hornasummu hans og breytið hliðarlengd**.

9 **Merkið tvo nýja punkta og teiknið .... o.s.frv**.

Verkefni 4 , með útskýringum.

Finnum hornasummu marghyrninga með hornafjölda af eigin vali. Notum rennistiku til að auðvelda breytingu á fjölda horna. Notum skipanir og forskrift í bland við táknlykla.

Skref:

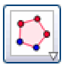
1 **Takið út ásana og hnitakerfið.** Þetta er gert þar sem reglur um marghyrninga standa óháð nokkru hnitakerfi.

2 **Setjið inn tvo punkta, A og B.** Hér koma sjálfkrafa hnit punktanna undir „Frjálsir hlutir“.

3 **Búið til rennistiku.** Óhætt er að setja rennistikuna hvar sem nemandi vill, það má alltaf færa hana seinna ef hún verður fyrir.

4 **Breytið stillingu á rennistiku þannig að fjöldi horna sé táknaður með n og að**

$n \in Z_+$ og $n > 2$. Við búum til rennistiku sem hentar tilefninu. Rennistikan verður notuð til að segja til um fjölda horna í marghyrningi. Notum **n** fyrir heiti stikunnar. Lægsta gildi (min) verður 3 og hæsta gildi má hver og einn velja. Aðeins má nota heilar tölur.

5 **Búið til marghyrning.** Fljótt á litið er hægt að fara tvær leiðir að þessu marki. Hér má fara þá leið að slá inn í inntaksreit „Marghyrningur[A, B, n]“. Það er einnig hægt að nota táknlykil  og „n“ sem fjölda horna.

6 **Finnið stærð eins horns marghyrningsins.** Hornpunktarnir verða merktir í stafrófsröð og því er best að finna stærð hornsins $\angle CBA$. Við eigum þá ekki á hættu að hornið hverfi ef fjöldi horna breytist. Hornið verður sjálfkrafa merkt **α**.

7 **Finnið hornasummu marghyrningsins.** Sláið inn í inntaksreit „Hornasumma = (n–2)*180. Hér verður ekki hægt að margfalda saman **$n \cdot \alpha$** þar sem hornið er gefið upp í gráðum og heildarsumman verður ekki gefin umfram 360^o. Öll svör eru því 180^o eða 360^o. Athugið að ekki er verið að leiða út regluna um hornasummu marghyrninga heldur er reglan notuð til að sýna notkun rennistiku og skráningu í GeoGebra. Kennari velur þá hvort hann gefi upp regluna í framhaldi af notkun hennar í GeoGebra forritinu eða rifjar regluna upp. Nemendur kannast þá við hana en þurfa hugsanlega upprifjun. Á endanum styður þetta hvort annað.

8 **Færið nú til punktinn á rennistikunni**. Hér þarf nemandi að fylgjast með hvernig hornasumma breytist með auknum fjölda horna en summan hleypur á 180 í hvert sinn.

Verkefni 5 , með útskýringum

Sýnum tengsl hornafalla við einingahring.

Verkefni númer 5 hentar í áfanganum STÆ 303 þar sem unnið er með einingahring. Það hentar einnig vel í kennslu þó að nemendur hafi ekki tök á að framkvæma verkefnið. Lokamyndin stendur alveg fyrir sínu og auðveldar kennara útskýringar.

Skref

1 **Setjið punkt A í skurðpunkt ásanna**. **Setjið punkta B_1 og B_2 á x-ás í einnar einingar fjarlægð frá A**. Punktur A er settur í grunnpunkt hnitakerfisins, **A=(0,0)**. Punktarnir eru ýmist skráðir eða merktir **B_1 =(1,0)** og **B_2 = (–1,0)**.

2 **Búið til hring með miðju í punkti A og látið punkta B_1 og B_2 liggja á hringferli**. Nú er gott að stækka myndina, þysja út, til að myndin fái að njóta sín þegar línunum fjölgar.

3 **Setjið punkt á hringferilinn í fyrsta fjórðung, fjórðungi I**. Punkturinn verður sjálfkrafa merktur C og er hafður í fyrsta fjórðungi þar sem verið er að sýna sambandið á milli horna þar og horna í öðrum fjórðungum.

4 **Setjið geisla með upphafspunkt A í gegnum punkt C**.

5 **Finnið horn frá x-ás að geislanum**. Þetta horn verður sjálfkrafa merkt **α** og er grunnhorn geislans.

6 **Reiknið x = cos(α) og y = sin(α)**. Nú þarf að skrá þessi fyrirmæli í inntaksreitinn. Gott er að draga athygli að þessum tölum sérstaklega með litum.

7 **Teiknið línu í gegnum punktinn C hornrétt á x –ás og aðra lárétt á y-ás.** Línurnar verða sjálfkrafa merktar **b** og **c**. Þær sýna sömu gildi og hornaföllin sem áður voru reiknuð.

8 **Finnið skurðpunkta línanna b og c við x-ás og y-ás**. Punktarnir verða sjálfkrafa merktir **D** og **E**.

9 **Finnið skurðpunkta línanna b og c við hringferilinn**. Nú koma fram merkingar ofan í punkt **C**, sem þegar er skilgreindur. Þetta á eftir að gerast aftur seinna í verkefninu og þessa punkta (eða heiti þeirra) þarf að fela á einhverjum tímapunkti.

Hvort það er gert jafnóðum eða í lokin skiptir ekki máli. Þó er mikilvægt að halda hnitum punktanna í myndinni því þeir sýna einmitt það sem leitað er að.

10 **Teiknið lóðrétta og lárétta línur í gegnum ofangreinda skurðpunkta**. Línurnar verða sjálfkrafa merktar **d** og **e**. Nú eru komnar tvær lóðréttar línur sitt hvoru megin við y-ásinn og aðrar tvær láréttar sitt hvoru megin við x-ásinn.

11 **Finnið skurðpunkta línanna d og e við hringferilinn**. Best er að láta skurðpunktana vera sýnilega í myndinni. Tölugildin verða alltaf eins og útreiknuð kósínus- og sínusgildi hornsins **α** en verkefnið gengur út á að sýna sambandið þar á milli.

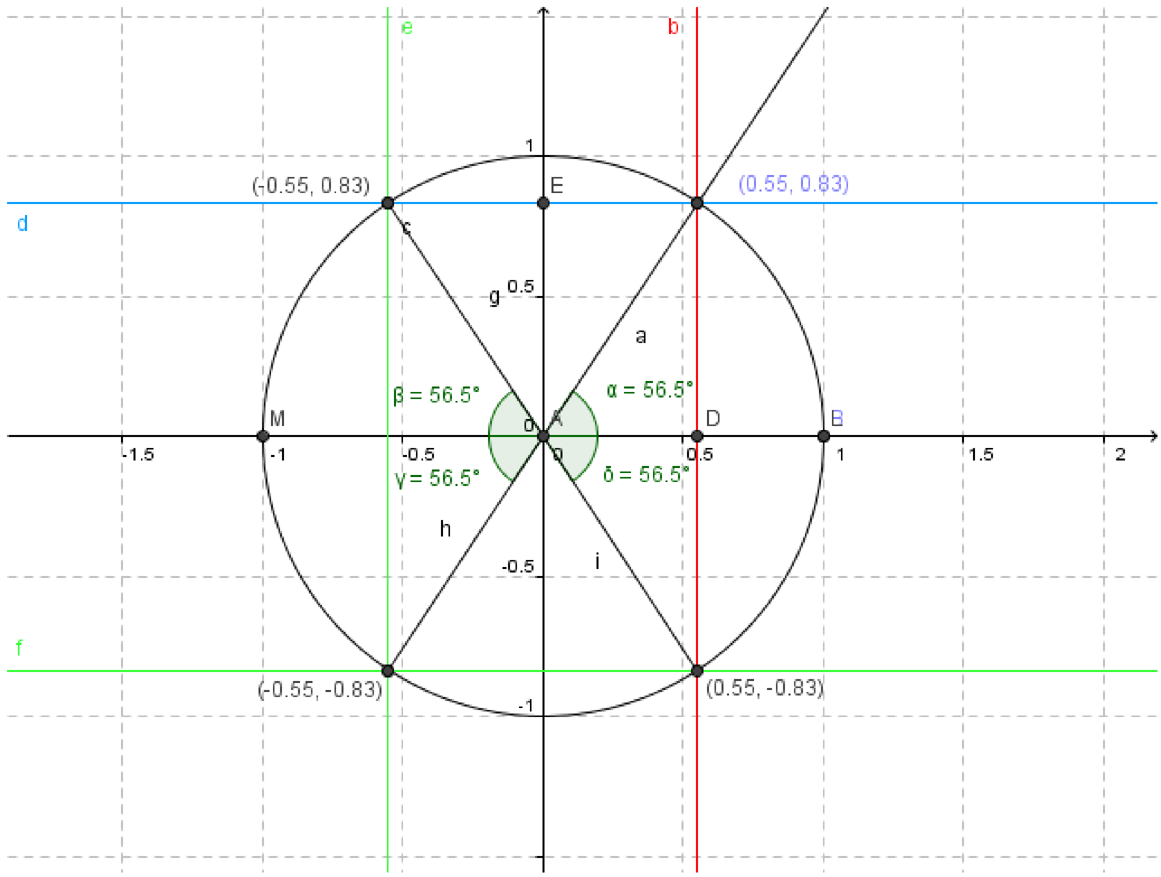
12 **Teiknið strik frá punkti A til skurðpunktanna í fjórðungum II, III og IV**. Það er betra að hafa strik hérna þar sem geislar eru öllu fyrirferðameiri og draga athyglina frá hornunum seinna þegar geislinn í fyrsta fjórðungi er hreyfður. Geislinn truflar einnig athugunina á merktum skurðpunktum myndarinnar.

13 **Finnið öll horn sem x-ás myndar við strikin**. Hér er komið sama hornið á hverjum stað og það er einmitt sambandið við grunnhornið í fyrsta fjórðungi sem verið er að sýna.

14 **Hreyfið geislann innan fyrsta fjórðungs og berið saman útreiknuð x- og y-gildi, hnit skurðpunktanna og hornin í hverjum fjórðungi**. Hinn sýnilegi þáttur uppgötvunarinnar er augljós og sannarlega til þess fallinn að styðja við frekari fræðilegar útskýringar og sannanir sem tengjast hornaföllum í einingahring.

Rétt er að snurfusa myndina, fela óþarfa punkta, gera hnitin og hornin sýnilegri og svo framvegis. Hafi nemandi tekið einhver skref verkefnisins í annarri röð en hér er sagt til um þá þarf ekki að vera að myndin verði neitt verri fyrir það. Þess skal þó gætt að merkingar á punktum og línum geta verið á skjön en slíkt á engu að breyta um sýnilegt samband hornanna í hverjum fjórðungi eða tengingu við reiknuð gildi.

Ef farið er eftir fyrirmælunum lið fyrir lið þá gæti lokamynd litið svona út:



Hvernig gengur nemendum?

Hér verður sagt frá því hvernig til tókst þegar nemendur í Stæ 102 og Stæ 203 unnu verkefni samkvæmt vinnuseðlunum. Þegar þetta verkefni er unnið á vorönn 2009 þá hafa nemendur ekki fengið neina kennslu í forritinu GeoGebra. Í skólanum eru tveir nemendahópar í áfanganum Stæ 102. Það kom sér vel að hóparnir eru ekki stórir og því gátu allir komist í tölvur á sama tíma til að vinna verkefnin. Í fyrstu var kynning á vefslóðinni geogebra.org og forritinu almennt og sýnikennsla í kennslustofu auk þess sem meginhugtök sem notuð eru voru kynnt. Að þessari kynningu lokinni þá fóru nemendur sjálfir að vinna með forritið. Einn tími fór í að fikta í hinu og þessu, skoða lyklatáknin og flettigluggana og komast yfir innbyggða hræðslu við tölvurnar. Í annarri kennslustund fengu nemendur verkefni 1– 4 til að vinna með og er óhætt að segja að þau gengu framar vonum. Vitanlega þurfti að spyrja að ýmsu en kennari gaf sjaldnast bein svör heldur svaraði með leiðandi spurningum. Nemendur komust nokkuð vel í gegnum verkefnin 1 og 2. Þó ber þess að geta að sumir nemendur áttu nóg með að fylgja fyrirmælum án þess almennilega að gera sér grein fyrir fræðunum. Það er einmitt einn tilgangur með verkefnum 1 og 2 en þá reynast verkefni 3 og 4 heldur erfiðari fyrir þá nemendur. Kennari reyndi meðvitað að gefa ekki öllum nemendum nákvæmlega sömu upplýsingar til að fá ekki nákvæmlega sömu lausnir hjá öllum. Vitanlega er munur á nemendum í almennu námi og hann verður e.t.v. skýrari þegar unnin eru verkefni að þessu tagi, hvort sem um er að ræða getumunur, ákvörðunarfælni eða eitthvað annað.

Hér eru nokkur dæmi um vandamál sem komu upp og þurfti að leysa:

- Muna vera í réttri táknmynd hverju sinni.
- Hvar eiga punktarnir A og B að vera.
- Nemandi setur punkt D ekki á grunnlínu og punkt E ekki á samsíða línu.
- Velja þarf punkta þegar stika á horn og fara „rétta“ leið til að kalla það fram.
- Muna að loka marghyrningum þegar notaður er viðkomandi táknlykill.
- Muna að nefna útreikningana einhverju nafni þegar inntaksreitur er notaður.
- Hvar á rennistikan að vera.

Margt fleira kom upp eins og gengur og gerist í kennslu en vísa má á skýringarnar sem fylgja verkefninu hér að framan. Rétt benda á að örfáir nemendur hafa ekki áhuga á þessari vinnu frekar en nokkurri annarri en ekki er hægt að kenna forritinu um slíkt áhugaleysi.

Þegar kennari hafði fengið verkefni flestra nemenda og farið yfir þau og skilað til nemenda þá voru þau rædd töluvert sem og vinna í GeoGebra forritinu almennt. Það var samdóma álit nemenda sem höfðu setið áfangann áður að GeoGebra forritið og verkefnin skýrðu út heilmargt sem þau höfðu ekki áttað sig á áður. Í framhaldi af þessari verkefnavinnu var GeoGebra töluvert notað í verkefnum bókarinnar og er fer ekkert á milli mála að margt er til bóta frá því sem áður hefur verið gert. Má þar nefna teikningar á hæðarlínum þríhyrninga, helmingalínum hornanna, miðlínum og miðþverlum. Teikningar nemenda hafa fram til þessa verið afar mismunandi, í besta falli þokkalegar. Nú ber svo við að þær eru allar góðar og sumar framúrskarandi.

Nemendur í Stæ 203 eru búnir með sama efni og Stæ 102 hóparnir eru að vinna en vildu ólm frá að prófa. Það varð úr að kennari sýndi þeim grunninn í einni kennslustund og lét nemendur hafa verkefni 1– 4 í annarri kennslustund í tölvuveri. Það var alveg hreint með ólíkindum hve þau voru fljót að vinna úr verkefnunum. Þar sem áfangi Stæ 303 er ekki kenndur þessa önn þá fengu nemendurnir sem fljótastir voru verkefni 5 til að vinna og þótt heldur hafi hægt á þeim þá komust þau vel í gegnum þau verkefni. Síðan þá hefur GeoGebra forritið óspart verið notað til að sýna föll og annað sem gott er að hafa sýnilegt á skjávarpa við kennslu.

Heimildir

Aðalnámskrá framhaldsskóla, Stærðfræði. (1999) Reykjavík, Menntamálaráðuneyti

Björk, Lars-Eric og Brolin, Hans. (2000). *Stærðfræði 3000, Grunnbók fyrir framhaldsskóla*. Íslensk þýðing Guðmundur Jónsson, Jón Eggert Bragason, Ásgeir Torfason og Jóhann Ísak Pétursson. Reykjavík, Mál og menning.

Drög að nýrri menntastefnu fyrir framhaldsskóla, lærdómsviðmið. (2009). Óútgefið vinnuskjal, Menntamálaráðuneyti. Sótt í febrúar 2009 frá http://www.nymenntastefna.is/media/frettir//laerdomsvidmid_Sta_eftir_trepum.pdf

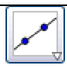
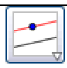
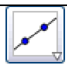
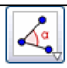
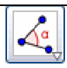
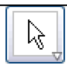
Kristín Bjarnadóttir. (2008). *Hugtök í stærðfræði*. Reykjavík, Námsgagnastofnun.

Jón Hafsteinn Jónsson, Níels Karlsson og Stefán G. Jónsson. (2000). *STÆ103*. Akureyri, Tölvunot ehf.

Jón Þorvarðarson. (2005). *Og ég skal hreyfa jörðina – forngrísku stærðfræðingarnir og áhrif þeirra*. Reykjavík, STÆ ehf.

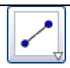
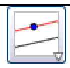
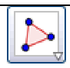
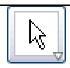
Jón Þorvarðarson. (2002). *STÆ 103*. 2. útgáfa. Reykjavík, gefin út af höfundi.

Vinnuseðill 1

Skref	Fyrirmæli	Tákn
1	Byrjum á því að hreinsa hnitakerfið og ásana í burtu af blaðinu	
2	Teiknið tvo punkta **A** og **B** á blaðið	
3	Dragið línu í gegnum punktana **A** og **B**. Hún verður sjálfkrafa merkt **a**. Köllum hana grunnlínu	
4	Teiknið punktinn **C** utan við grunnlínu	
5	Dragið línu í gegnum punkt **C**, samsíða grunnlínu **a**. Hún verður sjálfkrafa merkt **b**. Köllum hana samsíða línu	
6	Teiknið tvo nýja punkta. **D** á grunnlínu **a** og **E** á samsíða línu **b**	
7	Dragið línu í gegnum punkta **D** og **E**. Hún verður sjálfkrafa merkt **c**. Köllum hana skálínu	
8	Veljið eitthvert horn sem skálína myndar við grunnlínu og finnið stærð þess	
9	Finnið stærð einslægs horns. Athugið að vanti eitthvað upp á að framkvæma megi fyrirmælin þá verðið þið að setja inn nauðsynlega hluti	 
10	Færið nú til punkt **C**, punkt **D** eða punkt **E** og fylgist með stærð einslægu hornanna. Hvað getið þið séð?	

Ólafur Týr Guðjónsson

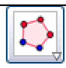
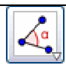
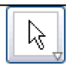
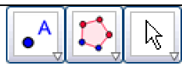
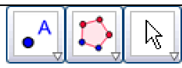
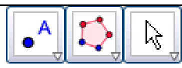
Vinnuseðill 2

Skref	Fyrirmæli	Tákn
1	Byrjum á því að hreinsa hnitakerfið og ásana í burtu af blaðinu	
2	Teiknið tvo punkta **A** og **B** á blaðið	
3	Dragið strik með upphafspunkt í **A** og endapunkt í **B**. Hún verður sjálfkrafa merkt **a**. Köllum hana grunnlínu þríhyrningsins	
4	Teiknið punktinn **C** utan við grunnlínu	
5	Dragið línu í gegnum punkt **C**, samsíða grunnlínu **a**. Hún verður sjálfkrafa merkt **b**. Köllum hana samsíða línu	
6	Teiknið punkta **D** á samsíða línu **b**	
7	Teiknið þríhyrning Δ**ABD**	
8	Færið nú til punkt **D** og fylgist jafnframt með stærð þríhyrningsins. Verður einhver breyting á flatarmáli þríhyrningsins?	

Ólafur Týr Guðjónsson

Vinnuseðill 3

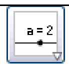
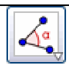
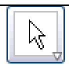
Sýnum fram á að hornasumma marghyrninga er fasti miðað við fjölda horna hverju sinni

Skref	Fyrirmæli	Tákn
1	Byrjum á því að hreinsa hnitakerfið og ásana í burtu af blaðinu	
2	Teiknið tvo punkta **A** og **B** á blaðið	
3	Búið til jafnhliða þríhyrning í punktum **A** og **B**	
4	Finnið öll horn marghyrningsins	
5	Reiknið hornasummu marghyrningsins	
6	Færið nú punkt **A** eða punkt **B** til og athugið hvort breyting verður á lengdum hliðanna, flatarmáli og hornasummu	
7	Merkið tvo nýja punkta og teiknið ferning, athugið hornasummu hans og breytið hliðarlengd	
8	Merkið tvo nýja punkta og teiknið fimmhyrning, athugið hornasummu hans og breytið hliðarlengd	
9	Merkið tvo nýja punkta og teiknið .... o.s.frv.	

Ólafur Týr Guðjónsson

Vinnuseðill 4

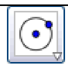
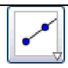
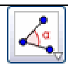
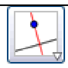
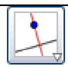
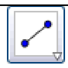
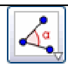
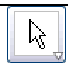
Finnum hornasummu marghyrninga með hornafjölda af eigin vali

Skref	Fyrirmæli	Tákn
1	Byrjum á því að hreinsa hnitakerfið og ásana í burtu af blaðinu	
2	Teiknið tvo punkta **A** og **B** á blaðið	
3	Búið til rennistiku	
4	Breytið stillingu á rennistiku þannig að fjöldi horna sé táknaður með **n** og að $\mathbf{n} \in Z_{+}$ og $\mathbf{n} > \mathbf{2}$	
5	Búið til marghyrning	
6	Finnið stærð eins horns marghyrningsins	
7	Finnið hornasummu marghyrningsins	
8	Færið nú til punktinn á rennistikunni og fylgist með hvernig hornasumma breytist	

Ólafur Týr Guðjónsson

Vinnuseðill 5

Sýnum tengsl hornafalla við einingahring

Skref	Fyrirmæli	Tákn
1	Setjið punkt A í skurðpunkt ásanna. Setjið punkta B_1 og B_2 á x-ás í einnar eininga fjarlægð frá A	
2	Búið til hring með miðju í punkti A og látið punkta B_1 og B_2 liggja á hringferli	
3	Setjið punkt C á hringferilinn í fyrsta fjórðung, fjórðungi I.	
4	Setið geisla í gegnum punkt C með upphafspunkt í A	
5	Finnið horn frá x-ás að geislanum	
6	Reiknið $x = \cos(\alpha)$ og $y = \sin(\alpha)$	
7	Teiknið línu í gegnum punktinn C hornrétt á x –ás og aðra lárétt á y-ás. Línu b og línu c	
8	Finnið skurðpunkta línanna b og c við x-ás og y-ás	
9	Finnið skurðpunkta línanna b og c við hringferilinn	
10	Teiknið lóðrétta línu d og lárétta línu e í gegnum ofangreinda skurðpunkta	
11	Finnið skurðpunkta línanna d og e við hringferilinn	
12	Teiknið strik frá punkti A til skurðpunktanna í fjórðungum II, III og IV	
13	Finnið öll horn sem x-ás myndar við strikin	
14	Hreyfið geislann innan fyrsta fjórðungs og berið saman útreiknuð x- og y-gildi, hnit skurðpunktanna og hornin í hverjum fjórðungi	

Ólafur Týr Guðjónsson