Fyrirlestrar Reynis Axelssonar

Glósað af Guðmundi Einarssyni

Grannfræði

2012

Efnisyfirlit

Kafli 1

Inngangur

1.1 Kynning á námskeiði

Reynir byrjar á að kynna bók Munkres. Reynir byrjar á smá spjalli um Grannfræði. Grannfræðin er eins og mengjafræði, hún er undirstöðugrein undir margt annað, ásamt því að vera sérstök fræðigrein. Við byrjum á að fara í almenna grannfræði, síðan seinna á misserinu fáum við smá nasasjón af algebrulegri grannfræði. Útaf fyrir sig er hin almenna grannfræði frekar einfaldur hlutur en abstrakt. Grannfræði er partur af almennu tungumáli stærðfræðinnar, það þurfa allir að kunna skil á undirstöðuhugtökum grannfræðinnar. Undirstöðuhugtak er t.d. opið mengi. Grannfræði fjallar um samfelldar varpanir.

Skilgreining 1 *Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld í punkti x ef fyrir öll $\epsilon > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ fyrir öll y þ.a. $|x - y| < \delta$. Hér erum við að gera ráð fyrir að X og Y séu hlutmengi í $\mathbb{R}$, ef við erum með önnur rúm þurfum við að nota aðra aðferð til að mæla firðir, eins og t.d. lengd vigra í $\mathbb{R}^n$. Almennar væri þá hægt að rita:*

Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld í punkti x ef fyrir öll $\epsilon > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að $d_Y(f(x) - f(y)) < \epsilon$ fyrir öll y þ.a. $d_X(x - y) < \delta$.

Setning 1.1 *Vörpun $f : X \to Y$ milli firðrúma er samfelld þ.þ.a.a. $f^{-1}[V]$ sé opið mengi í X fyrir öll opin mengi V í Y.*

Þá má umrita skilgreininguna að ofan en á ný:

Skilgreining 2 *Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld í punkti x ef fyrir sérhverja grennd V um $f(x)$ í Y er til grennd U um x í X þ.a. $f[U] \subset V$.*

Þá má spyrja hvað er grennd? Grennd er skilgreind útfrá firðinni, en í raun þurfum við ekki að hafa neinar firðir til að skilgreina opin mengi og grenndir. *Hausdorf* byrjaði í staðin fyrir að tala um firðir að gefa sér kerfi af opnum grenndum í stað þess að hafa firðir. Þá er hægt að segja að mengi er opið þ.þ.a.a. í kringum sérhvern punkt í menginu er til opin grennd sem inniheldur punktinn. Einnig er hægt að gera það öfugt, með því að skilgreina opnar grenndir útfrá opnu mengjunum.

1.2 Undirstöðuatriði

Skilgreining 3 *Látum X vera mengi. Grannmynztur á X er mengi $\mathcal{T}$ af hlutmengjum í X þ.a. eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:*

1. $\varnothing \in \mathcal{T}$ *og* $X \in \mathcal{T}$.
2. *Ef* $(U_i)_{i\in I}$ *er fjölskylda af stökum í* $\mathcal{T}$, *þá er* $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.
3. *Ef* $U, V \in \mathcal{T}$, *þá er* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Grannrúm er tvennd $(X, \mathcal{T})$ þar sem X er mengi og $\mathcal{T}$ er grannmynztur á X. Köllum stökin í $\mathcal{T}$ opin-hlutmengi í X (m.t.t. $\mathcal{T}$).

Sýnidæmi 1.2.1 1. Látum d vera firð á X; þ.e. vörpun $d : X \times X \to \mathbb{R}$ þ.a.

   (a) $d(x, y) \geq 0$; og $d(x, y) = 0$ þ.þ.a.a. $x = y$.

   (b) $d(x, y) = d(y, x)$.

   (c) (þríhyrningsójafnan) Fyrir öll x, y, z úr X er

   $$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

   Fyrir gefna firð á X, þá segjum við að hlutmengi U í X sé *opið* (m.t.t. d) ef fyrir sérhvert stak x í U er til rauntala $\epsilon > 0$, þ.a.

   $$\{y \in X : \ d(x, y) < \epsilon\} \subset U.$$

   Opnu mengin m.t.t. d mynda grannmynztur á X, sem við segjum að sé *grannmynztrið sem firðin d skilgreinir.*

2. Látum X vera mengi og $\mathcal{P}$ vera mengi allra hlutmengja í X. Þá er $\mathcal{P}(X)$ grannmynztur á X, kallað strjála grannmynztrið. Öll hlutmengi í X eru opin. Það er skilgreint af firðinni d, þar sem

   $$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{ef } x \neq y \\ 0 & \text{ef } x = y. \end{cases}$$

   Segjum að grannrúm sé strjált ef það hefur strjála grannmynztrið.

3. Látum X vera mengi, þá er $\{\varnothing, X\}$ grannmynztur á X. Þetta er ekki skilgreint af firð ef X hefur fleiri stök en eitt. Ef d er firð á X og $x, y \in X$, $x \neq y$; setjum $r := \frac{1}{2}d(x, y) > 0$, þá er $\{z \in X : d(x, z) < r\}$ opið hlutmengi í grannmynztrinu sem d skilgreinir, og hvorki $\varnothing$ né X.
   Köllum $\{\varnothing, X\}$ fáfengilega grannmynztrið á X.

4. Ef X hefur nákvæmlega tvö stök, x, y, þá er

$$\mathcal{T} := \{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}\}$$

grannmynztur á X.

5. Látum K vera svið og (t.d. $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$). Við segjum að hlutmengi A í K^2 sé algebrulegt ef til er fjölskylda $(P_j)_{j\in I}$ þ.a. $A = \{(x, y) \in K^2 : P_j(x, y) = 0$ fyrir öll j úr $I\}$. Ef $(A_k)_{k\in I}$ er fjölskylda af algebrulegum mengjum,

$$A_k = \{(x, y) : P_j(x, y) = 0 \quad \text{f.öll } j \in I_k\}$$

þá er

$$\bigcap_{k\in I} A_k = \{(x, y) : P_j(x, y) = 0 \quad \text{f.öll } j \in \bigcup_{k\in I} I_k\}$$

algebrulegt. Ef $A = \{(x, y) : P_i(x, y) = 0 \quad \text{f.öll } j \in J_1\}$ og $B = \{(x, y) : Q_k(x, y) = 0 \quad \text{f.öll } k \in J_2\}$, þá er

$$A \cup B = \{(x, y) : \ P_j Q_k(x, y) = 0 \quad \text{f.öll } (j, k) \in J_1 \times J_2\}.$$

Líka er K^2 núllstöðvamengi núllmargliðunnar og $\varnothing$ núllstöðvamengi föstu margliðunnar 1. Köllum nú hlutmengi U í K^2 opið ef $K^2 \setminus U$ er algebrulegt, þ.e. ef til er algebrulegt mengi A þ.a. $U = K^2 \setminus A$. Ef $(U_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af opnum mengjum í K^2, $U_i = K^2 \setminus A_i$, A_i algebrulegt, þá er

$$\bigcup_{i\in I} U_i = K^2 \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i)$$

opið; og fyrir opin mengi U, V eru til algebruleg mengi A, B þ.a. $U = K^2 \setminus A$, $V = K^2 \setminus B$ og þá er

$$U \cap V = K^2 \setminus (A \cup B)$$

opið. Þetta er grannmynztur á K^2, kallað Zariski-grannmynztrið. Þetta gengur eins fyrir K^n, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

6. Opnu mengin í Zariski-grannmynztrinu á $K^1 = K$ eru mengin U þ.a. $K \setminus U$ sé annaðhvort endanlegt eða allt K. ALmennar má fyrir sérhvert mengi X skilgreina grannmynztur á X þ.a. opnu mengin séu þau hlutmengi U í X þ.a. $X \setminus U$ sé endanlegt eða allt X. Líka má skilgreina grannmynztur á X þ.a. opnu mengin séu þau hlutmengi í X þ.a. $X \setminus U$ sé *teljanlegt* eða allt X.

7. Skilgreinum nýtt grannmynztur á $\mathbb{R}$ þannig: Hlutmengi U í $\mathbb{R}$ er opið þ.þ.a.a. fyrir sérhvert x úr U sé til $\epsilon > 0$ þ.a. $[x, x + \epsilon[\subset U$.

Skilgreining 4 *Látum X vera grannrúm. Við segjum að hlutmengi í X er sagt vera **lokað** ef fyllimengi þess í X er opið.*

Athugasemd
Skrifum X í stað $(X, \mathcal{T})$ ef ekki er hætta á misskilningi.

Af de-Morgan formúlunum

$$X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I}(X \setminus A_i), \quad X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I}(X \setminus A_i)$$

leiðir:

Setning 1.2
1. *Mengin $X, \varnothing$ eru lokuð. Ef $(A_i)_{i \in I}$ er fjölskylda af lokuðum mengjum og $I \neq \varnothing$, þá er $\bigcap_{i \in I} A_i$ lokað. Ef A, B eru lokuð, þá er $A \cup B$ lokað.*
2. *Ef $\mathcal{L}$ er mengi af hlutmengjum í X þ.a. $\varnothing, X \in \mathcal{L}$, sniðmengi fjölskyldu (sem er ekki tóm) af stökum í $\mathcal{L}$ er stak í $\mathcal{L}$ og sammengi tveggja staka í $\mathcal{L}$ er stak í $\mathcal{L}$, þá er til nákvæmlega eitt grannmynztur á X þ.a. $\mathcal{L}$ sé mengi lokuðu mengjanna í því grannmynztri.*

Skilgreining 5 *Við segjum að mengi $\mathcal{B}$ af hlutmengjum í X sé grunnur fyrir grannmynztrið $\mathcal{T}$ á X ef sérhvert stak í $\mathcal{T}$ er sammengi fjölskyldu af stökum í $\mathcal{B}$, m.ö.o. ef fyrir sérhvert hlutmengi U í X sem er stak í $\mathcal{T}$ og sérhvert x úr U er til B úr $\mathcal{B}$ þ.a. $x \in B \subset U$.*

Sýnidæmi 1.2.2 Ef X er firðrúm, þá mynda opnu kúlurnar grunn fyrir grannmynztrið sem firðin skilgreinir. Opnu bilin í $\mathbb{R}$ mynda grunn fyrir venjulega grannmynztrið á $\mathbb{R}$.

Setning 1.3 *Fjölskylda $\mathcal{B}$ af hlutmengjum í X er grunnur fyrir grannmynztur á X þ.þ.a.a.*

1. *Fyrir sérhvert gefin B_1, B_2 úr $\mathcal{B}$ og x úr $B_1 \cap B_2$ er til B_3 úr $\mathcal{B}$ þ.a. $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$; m.ö.o. ef sniðmengi tveggja staka í $\mathcal{B}$ er sammengi fjölskyldu af stökum í $\mathcal{B}$.*
2. *$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.*

Sönnun
Ljóst er að grunnur fullnægir þessum skilyrðum. Öfugt, ef $\mathcal{B}$ fullnægir þeim, þá skilgreinum við$\mathcal{T}$ sem mengi allra hlutmengja í X sem eru sammengi fjölskyldu af

stökum í $\mathcal{B}$; þá er $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ og að sammengi staka í $\mathcal{T}$ er í $\mathcal{T}$. Ef $U, V \in \mathcal{T}$, $U = \bigcup_{j\in J} B_j$ og $V = \bigcup_{k\in K} B'_k$, þá er

$$\begin{aligned} U \cap V &= (\bigcup_{j\in J} B_j) \cap (\bigcup_{k\in K} B'_k) \\ &= \bigcup_{j\in J} (B_j \cap (\bigcup_{k\in K} B'_k)) \\ &= \bigcup_{[} i \in J] \bigcup_{k\in K} (B_j \cap B'_k) \end{aligned}$$

En $B_j \cap B'_k$ er sammengi staka úr $\mathcal{B}$, svo að $U \cap V$ er það líka.

Skilgreining 6 *Látum $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ vera grannmynztur á sama mengi X, við segjum að $\mathcal{T}_1$ sé **fínna** en $\mathcal{T}_2$ og að $\mathcal{T}_2$ sé **grófara** en $\mathcal{T}_1$ ef $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, þ.e. sérhvert hlutmengi í X sem er opið m.t.t. $\mathcal{T}_1$.*

Sýnidæmi 1.2.3 Fáfengilega grannmynztrið $\{\varnothing, X\}$ er grófasta grannmynztrið á X, en strjála grannmynztrið $\mathcal{P}(x)$ er það fínasta. Venjulega eru grannmynztur ekki sambærileg.

Setning 1.4 *Látum $\mathcal{S}$ vera mengi af hlutmengjum í X. Þá er til grófasta grannmynztur $\mathcal{T}$ á X þ.a. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$; grunnur fyrir það grannmynztur er mengið sem hefur sem stök mengið X og öll sniðmengi af endanlega mörgum stökum í $\mathcal{S}$.*

Skilgreining 7 *Segjum þá að $\mathcal{S}$ sé **forgrunnur** fyrir grannmynztrið $\mathcal{T}$.*

Sönnun
Við höfum að

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{T} \text{ grannmynztur á } X, \mathcal{S} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}$$

er augljóslega grannmynztur og grófara en öll grannmynztur sem innihalda $\mathcal{S}$. Það inniheldur X sem stak og líka öll sniðmengi af stökum í $\mathcal{S}$. Þá nægir að sýna að þessi mengi myndi grunn fyrir grannmynztrið á X. En það er ljóst: Sniðmengi endanlega margra er greinilega af sömu gerð.

Setning 1.5 *Látum X vera grannrúm með grannmynztri $\mathcal{T}$ og Y vera hlutmengi í X. Þá er*

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

grannmynztur á Y.

Sönnun
Sönnun augljós.

Skilgreining 8 *Segjum að $\mathcal{T}_Y$ sé grannmynztrið á Y, sem $\mathcal{T}$ gefur af sér. Við segjum að grannrúm Y sé **hlutrúm** í grannrúmi X ef Y er hlutmengi í X og grannmynztrið á Y er það sem grannmynztrið á X gefur af sér.*

Þannig fáum við mörg athyglisverð grannrúm, t.d. öll hlutgrannrúm í $\mathbb{R}^n$; þar á meðal kúluhvelin

$$\mathbb{S}_n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}.$$

Athugasemd
Ef grannmynztrið á X er skilgreint af firð d, þá er $\mathcal{T}_Y$ skilgreint af firðinni $d|Y \times Y$.

Skilgreining 9 *Látum A vera hlutmengi í grannrúmi X.*

1. *Segjum að mengið x sé **innri punktur** mengisins A ef til er opið mengi U í X þ.a. $x \in U \subset A$. Mengi allra innri punkta mengisins A er táknað*

   $$\mathring{A}$$

   *og það nefnist **innri kjarni** mengisins A.*

2. *Við segjum að x sé **aðlægur punktur** mengisins A ef sérhvert opið mengi sem hefur x sem stak sker mengið A. Mengi aðlægra punkta mengisins A er táknað*

   $$\overline{A}$$

   *og kallað **lokaður hjúpur** mengisins A.*

3. ***Jaðar** mengisins A er*

   $$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)};$$

   *punktar þess kallast **jaðarpunktar** mengisins A.*

4. *Við segjum að A sé **grennd** um punktinn x ef $x \in \mathring{A}$.*

Setning 1.6

1. *Höfum $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ Hlutmengi A í X er opið þ.þ.a.a. $\mathring{A} = A$. Hlutmengi A í X er lokað þ.þ.a.a. $\overline{A} = A$.*

2. *Við höfum*

   $$X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A},$$
   $$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ.$$

3. *Ef $A \subset B \subset X$, þá er $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ og $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

4. *Við höfum*

$$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

5. *Við höfum*

$$(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Sönnun

1. Ef U er opið mengi og $U \subset A$, þá gildir að $U \subset \mathring{A}$. Ef A er opið, þá er $A \subset \mathring{A}$, hitt gildir alltaf augljóslega. Ef $\mathring{A} = A$, þá má fyrir x úr A finna opið mengi U_x þ.a. $x \in U_x \subset A$. Þá er ljóst að $A = \bigcup_{x \in A} U_x$, svo að A er opið.

2. Að $x \in X \setminus \mathring{A}$ þýðir að ekki er til opið mengi U þ.a. $x \in U \subset A$; og það þýðir að fyrir öll opin mengi U þ.a. $x \in U$ gildi $U \not\subset A$, þ.e. $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$; og það þýðir einmitt að $x \in \overline{X \setminus A}$.
Að $x \in X \setminus \overline{A}$ þýðir að til er U opið þ.a. $x \in U$ og U skeri ekki A, þ.e. $U \subset X \setminus A$; og það þýðir einmitt að $x \in (X \setminus A)^\circ$.
(1b) Nú gildir að A er lokað þ.þ.a.a. $X \setminus A$ sé opið þ.þ.a.a. $(X \setminus A)^\circ = X \setminus A$ þ.e. $X \setminus \overline{A} = X \setminus A$, og það þýðir einmitt að $A = \overline{A}$.

3. Augljóst.

4. Höfum að $\mathring{\mathring{A}} \subset \mathring{A}$. Ef $x \in \mathring{A}$, þá er til opið mengi U þ.a. $x \in U \subset A$. En þá er $U \subset \mathring{A}$, svo að $x \in \mathring{\mathring{A}}$. Þar með er $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$. Þá fæst

$$\begin{aligned} X \setminus \overline{\overline{A}} &= (X \setminus \overline{A})^\circ \\ &= (X \setminus A)^{\circ\circ} \\ &= (X \setminus A)^\circ \\ &= X \setminus \overline{A}, \end{aligned}$$

svo að $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

5. Ef $x \in (A \cap B)^\circ$, þá er til opið U þ.a. $x \in U \subset A \cap B$; þá er $x \in U \subset A$ og $x \in U \subset B$ svo að $x \in \mathring{A}$ og $x \in \mathring{B}$ og því $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Ef $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, þá er $x \in \mathring{A}$ og $\mathring{B}$, svo að til eru opin mengi U, V þ.a. $x \in U \subset A$ og $x \in V \subset B$. Þá er $x \in U \cap V \subset A \cap B$ og $U \cap V$ er opið, svo að $x \in (A \cap B)^\circ$. Þá er

$$\begin{aligned} X \setminus \overline{A \cup B} &= (X \setminus (A \cup B))^\circ \\ &= ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))^\circ \\ &= (X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ \\ &= (X \setminus \overline{A}) \cap (X \setminus \overline{B}) \\ &= X \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \end{aligned}$$

svo að $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Skilgreining 10 *Vörpun : $X \to Y$ milli grannrúma er sögð vera **samfelld** í punkti x úr X ef fyrir sérhverja grennd V um $f(x)$ í Y er til grennd U um x í X þ.a. $f[U] \subset V$. Við segjum að f sé **samfelld** ef hún er samfelld í sérhverjum punkti. **Grannmótun** er samfelld vörpun sem hefur samfellda andhverfu. Tvö grannrúm eru sögð vera **grannmóta** ef til er grannmótun á milli þeirra.*

Setning 1.7 *Fyrir vörpun $f : X \to Y$ milli grannrúma er jafngilt:*

1. *Vörpunin f er samfelld*
2. *Fyrir sérhvert hlutmengi A í X er $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Fyrir sérhvert lokað hlutmengi B í Y er frummyndin $f^{-1}[B]$ lokað mengi í X.*
4. *Fyrir sérhvert opið hlutmengi V í Y er $f^{-1}[V]$ opið mengi í X.*

Sönnun
(i) $\Rightarrow$ (ii): G.r.f. að f sé samfelld, að $A \subset X$ og $y \in f(\overline{A})$. Þá er til $x \in \overline{A}$ þ.a. $f(x) = y$. Látum V vera grennd um y, þar sem f er samfelld í x er til grennd U um x þ.a. $f[U] \subset V$. Þar sem $x \in \overline{A}$ er til z úr $A \cap U$. En þá er $f(z) \in f[U \cap A] \subset f[U] \cap f[A] \subset V \cap f[A]$, svo að $V \cap f[A] \neq \varnothing$. Þar með er $y \in \overline{f[A]}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Látum (ii) gilda og B vera lokað í Y. Setjum $A := f^{-1}[B]$. Þá er $f[A] \subset B$, svo að

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f[A]} \subset \overline{B} = B$$

svo að $\overline{A} \subset f^{-1}[B] = A \subset \overline{A}$ og því $\overline{A} = A$. Það þýðir að A er lokað.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Látum V vera opið í Y, þá er $Y \setminus V$ lokað í Y og því $X \setminus f^{-1}[V] = f^{-1}[Y \setminus V]$ lokað í X og þá $f^{-1}[V]$ opið í X.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Látum V vera grennd um $f(x)$ í Y, x gefið. Þá inniheldur V opna grennd W um $f(x)$; skv. (iv) er $U = f^{-1}[W]$ opið í X og þá grennd um x, og $f[U] \subset W \subset V$.

Athugasemd
Til að sjá að f sé samfellt í einum punkti x nægir að sjá að fyrir opna grennd V um $f(x)$ sé til opin grennd U um x þ.a. $f[U] \subset V$. Jafngilt er líka að fyrir grennd V um $f(x)$ sé $f^{-1}[V]$ grennd um x.

Setning 1.8
1. *Látum X vera grannrúm. Þá er samsemdarvörpunin $id_X : X \to X$ samfelld.*
2. *Látum $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ vera samfelldar varpanir milli grannrúma. Þá er samskeytingin $g \circ f : X \to Z$ samfelld.*

Sönnun
1. $\mathrm{id}_X^{-1}[U] = U$.

2. $(g \circ f)^{-1}[W] = f^{-1}[g^{-1}[W]]$.

Athugasemd
Viðvörun: Andhverfa gagntækrar samfelldrar vörpunar er ekki nauðsynlega samfelld.

Sýnidæmi 1.2.4 Látum X vera mengi með a.m.k. tvö stök. Þá er

$$\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{P}) \to (X, \{\varnothing, X\})$$

samfelld vörpun en andhverfan ekki.

Athugasemd
Látum $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ vera grannmynztur á X. Vörpunin $\mathrm{id}_X : X \to X$ er samfelld vörpun frá $(X, \mathcal{T}_1)$ yfir $(X, \mathcal{T}_2)$ þ.þ.a.a. $\mathcal{T}_1$ sé fínna grannmynztur en $\mathcal{T}_2$.

1.3 Margfeldi

Setning 1.9 *Látum X, Y vera grannrúm og*

$$pr_1 : X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto x;$$
$$pr_2 : X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y;$$

vera ofanvörpin. Þá er til grófasta grannmynztur á $X \times Y$ sem gerir bæði ofanvörpin samfelld. Það er skilgreint með grunninum

$$B := \{U \times V : U \textit{ opið í } X,\ V \textit{ opið í } Y\}.$$

Athugasemd
Ljóst er að ef þetta er eitthvað grannmynztur, þá er alltaf hægt að velja strjála grannmynztrið sem er fínast og það uppfyllir þetta.

Sönnun
Ef við höfum grannmynztur á $X \times Y$ sem gerir bæði ofanvörpin samfelld og U er opið í X, V er opið í Y, þá eru $\mathrm{pr}_1^{-1}[U] = U \times Y$ og $\mathrm{pr}_2^{-1}[V] = X \times V$ opin í $X \times Y$ og þá líka sniðmengið

$$\mathrm{pr}_1^{-1}[U] \cap \mathrm{pr}_2^{-1}[V] = U \times V$$

svo að $U \times V$ verður að vera opið. En mengin $U \times V$ fyrir U opið í X og V opið í Y mynda grunn fyrir grannmynztrið á $X \times Y$: Þetta er grunnurinn sem fæst úr forgrunninum.

$$\{U \times Y : U \text{ opið í } X\} \cup \{X \times V : V \text{ opið í } Y\}.$$

Hjálparsetning 1.1 *Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld ef $f^{-1}[V]$ er opið fyrir öll V úr einhverjum forgrunni fyrir grannmynztrið.*

Sönnun
Augljós vegna $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} V_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[V_i]$.

Setning 1.10 *1. Látum $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ vera varpanir milli grannrúma. Vörpunin*

$$(f, g) : Z \to X \times Y,\ z \mapsto (f(z), g(z))$$

er samfelld þá og því aðeins að f og g séu báðar samfelldar.

2. Látum $f : X \to Y$ og $g : Z \to T$ vera samfelldar varpanir, þá er vörpunin

$$f \times g : X \times Z \to Y \times T,\ (x, z) \mapsto (f(x), g(z))$$

samfelld.

Sönnun

1. Höfum $f = \mathrm{pr}_1 \circ (f, g)$ og $g = \mathrm{pr}_2 \circ (f, g)$, svo að f, g eru samfelld ef (f, g) eru það. Ef U er opið í X, V opið í Y, þá er

$$(f, g)^{-1}[U \times V] = f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V]$$

svo að þetta er opið ef f, g eru samfelld; þá fæst niðurstaðan með hjálparsetningu.

2. Augljóst vegna

$$(f \times g)^{-1}[V \times W] = f^{-1}[V] \times g^{-1}[W].$$

Fylgisetning 1.1 *Látum X vera grannrúm og $f, g : X \to \mathbb{R}$ vera samfelld raunföll á X, þá eru föllin $f + g$ og $f \cdot g$ samfelld. Eins fyrir tvinnföll.*

Sönnun

Vitum að föllin

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y,$$
$$\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot y$$

eru samfelld, og

$$f + g = \alpha \circ (f \times g),$$
$$f \cdot g = \mu \circ (f \times g).$$

Skilgreining 11 *$X \times Y$ með grófasta grannmynztrinu sem gerir ofanvörpin samfelld kallast* ***margfeldi*** *grannrúmana X og Y.*

Setning 1.11 *Látum X vera grannrúm, Y vera mengi og $f : X \to Y$ vera (átæka) vörpun. Þá er til fínasta grannmynztur á Y sem gerir vörpunin f samfellda: Hlutmengi V í Y er opið í því grannmynztri þá og því aðeins að $f^{-1}[V]$ sé opið mengi í X.*

Athugasemd
Ef við sleppum fínasta skilyrðinu, þá er alltaf hægt að láta Y hafa fáfengilega grannmynstrið og þá er f alltaf samfelld.

Sönnun
Segjum að hlutmengi U í Y sé opið í Y ef $f^{-1}[U]$ er opið í X; þetta skilgreinir grannmynztur $\mathcal{T}$ á Y:

1. $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$ og $f^{-1}[Y] = X$, svo $\varnothing, Y \in \mathcal{T}$.

2. Ef $(U_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af mengjum í $\mathcal{T}$, þá er $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} U_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[U_i]$ svo að $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$. Ef $U, V \in \mathcal{T}$ $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$, svo að $U \cap V \in \mathcal{T}$. Þar með er $\mathcal{T}$ grannmynztur á Y. Ef nú $\mathcal{T}_1$ er annað grannmynztur á Y sem gerir $f : X \to Y$ að samfelldri vörpun og $U \in \mathcal{T}_1$, þá er $f^{-1}[U]$ opið í X, svo að $U \in \mathcal{T}$. Því er $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$, svo að $\mathcal{T}$ er fínna en $\mathcal{T}_1$.

Athugasemd
Ef f er ekki átæk og $y \in Y \setminus f[X]$, þá er $f^{-1}[\{y\}] = \varnothing$, svo að $\{y\}$ er opið. Því gefur $\mathcal{T}$ af sér strjála grannmynztrið á $Y \setminus f[X]$.

1.4 Upprifjun um jafngildisvenzl

Munum að ***venzl*** á mengi X er hlutmengi í $X \times X$; skrifum xRy í stað $(x, y) \in R$ ef R er venzl á X. ***Jafngildisvenzl*** á X eru venzl $\sim$ á X þ.a. eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:

1. $x \sim x$ fyrir öll x úr X.

2. Ef $x \sim y$, þá er $y \sim x$.

3. Ef $x \sim y$ og $y \sim z$, þá er $x \sim z$.

Fyrir jafgildisvenzl $\sim$ á X og $x \in X$ kallast

$$[x] := \{y \in X :\ y \sim x\}$$

jafgildisflokkur staksins x m.t.t. $\sim$.
Deildaskipting mengisins X er mengi $\mathcal{D}$ af hlutmengjum í X þ.a. gildi:

1. Ef $D, E \in \mathcal{D}$ og $D \cap E \neq \varnothing$, þá er $D = E$.

2. Fyrir $D \in \mathcal{D}$ er $D \neq \varnothing$.

3. $X = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$.

Setning 1.12 *Ef $\sim$ er jafngildisvenzl á X, þá er mengið $\{[x]: x \in X\}$ deildaskipting mengisins X. Ef $\mathcal{D}$ er deildaskipting, þá fást jafngildisvenzl $\sim$ á X með að setja $x \sim y$ þ.þ.a.a. til sé $D \in \mathcal{D}$ þ.a. $x \in D$ og $y \in D$. Þetta gefur gagntæka samsvörun milli deildaskiptinga og jafngildisvenzla mengisins X.*

Táknum með $X/\sim$ deildaskiptinguna sem jafngildisvenzlin $\sim$ skilgreina og fáum **átæka** vörpun

$$\pi : X \to X/\sim, \ \pi(x) := [x]$$

sem ***náttúrlega ofanvarpið*** frá X á $X/\sim$.
Höfum

$$[x] := \pi^{-1}[\pi(x)].$$

Öfugt, ef $f : X \to Y$ er átæk vörpun þá mynda trefjarnar $f^{-1}[y] := \{x \in X : f(x) = y\}$ deildaskiptingu

$$\mathcal{D} = \{f^{-1}[y] : y \in Y\}.$$

sem samsvara jafngildisvenzlunum

$$x_1 \sim x_2 \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad f(x_1) = f(x_2).$$

Skilgreining 12 *Látum X vera grannrúm og $\sim$ vera gefin jafngildisvenzl á X. Fínasta grannmynztrið á $X/\sim$ sem gerir náttúrlega ofanvarpið $\pi : X \to X/\sim$ samfellt kallast* **deildagrannmynztrið** *sem grannmynztrið á X gefur af sér á $X/\sim$. Við segjum að X með þessu grannmynztri sé* **deildagrannrúm** *af X.*

Látum $(R_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af jafngildisvenzlum á X, $I \neq \varnothing$. Þá er

$$R := \bigcap_{i\in I} R_i$$

jafngildisvenzl á X þ.a. xRy þ.þ.a.a. xR_iy fyrir öll $i \in I$. Ef nú S er venzl á X og $\mathcal{R}$ er mengi allra jafngildisvenzla R þ.a. $S \subset R$, þá er $\bigcap_{R\in\mathcal{R}} R$ ***minnstu*** jafngildisvenzl sem innihalda S. Við höfum xRy þ.þ.a.a. til sé endanleg runa $x_0, ..., x_n$ í X þ.a. $x_0 = x$, $x_n = y$ fyrir $k = 1, ..., n$ gildi eitt af þrennu: $x_{k-1} = x_k$, $x_{k-1}Sx_k$ eða x_kSx_{k-1}.

Athugasemd
Þetta gefur okkur mjög almenna tækni til að líma saman grannrúm. Gerum t.d. ráð fyrir að við höfum tvær kúlur og við viljum líma þær saman í punktunum p og q sem eru á sitthvorru kúlunni. Þá skilgreinum við minnstu jafngildisvenzlin sem innihalda þessi venzl og tökum deildagrannmynztrið á sammenginu, þá fáum við nýtt grannrúm sem eru kúlurnar tvær límdar saman í einum punkti.

Skilgreining 13 *Látum S vera venzl á X og R vera minnstu jafngildisvenzl á X sem innihalda S. Við segjum að X/R með deildagrannmynztrinu sé rúmið sem fæst úr X með því að* **líma** *x við y fyrir öll x, y úr X þ.a. xSy.*

Sýnidæmi 1.4.1 1. Látum

$$F := \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]\}.$$

Látum M vera rúmið sem fæst við að líma punktinn $(-1, y)$ við punktinn $(1, 1-y)$ fyrir öll y úr $[0, 1]$. Útkoman kallast ***Möbíusar-ræma***. Höfum ofanvarp $\pi : F \to M$. Látum $p := \pi(-1, y) = \pi(1, 1-y)$. mengi V um p er grennd um p þ.þ.a.a. til sé $\epsilon > 0$ þ.a. $(B((-1, y), \epsilon) \cap F) \cup (B((1, 1-y), \epsilon) \cap F)$ varpist inn í V með π. Grenndin verður þá svona sammengi af hálfum hringskífum.
Eins má líma $(-1, y)$ við $(1, y)$ f.öll $y \in [0, 1]$; þá fæst sívalniingsflötur eða hringkragi, (við gerum ekki greinamun á grannmóta hlutum).
Ef við límum $(-1, y)$ við $(1, 1-y)$ fyrir öll y úr $[0, 1]$ og $(x, 0)$ við $(x, 1)$ fyrir öll x úr $[-1, 1]$, þá fæst svökölluð ***Klein-flaska***.
Ef við límum $(-1, y)$ við $(1, y)$ fyrir öll $y \in [0, 1]$ og $(x, 0)$ við $(x, 1)$ fyrir öll x úr $[-1, 1]$, þá fæst hjólflötur.
Áður en við athugum næsta dæmi:

Skilgreining 14 *Grannrúm kallast* **Hausdorff-rúm** *(eða T_2-rúm) ef fyrir sérhverja tvo ólíka punkta x og y í X eru til grenndir U um x og V um y í X þ.a. $U \cap V = \varnothing$.*

Grannrúm með Zariski grannmynztrinu eru ekki Hausdorff-rúm, þá getum við í besta lagi fundið grennd um einn punkt sem inniheldur ekki hinn. Athugum einnig að deildarúm af Hausdorff-rúmi þarf ekki endilega að vera Hausdorff-rúm.

2. Látum

$$L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ eða } y = 1\}.$$

Límum $(x, 0)$ við $(x, 1)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Við fáum línu með tvöföldum núllpunkti. Grennd um $[(0, 1)]$ inniheldur $\{[(x, 1)] : -\epsilon < x < \epsilon\}$; grennd um $[(0, 0)]$ inniheldur $\{[(x, 0)] : -\epsilon < x < \epsilon\}$ fyrir eitthver $\epsilon > 0$; en þær skerast í

$$\{[(x, 0)] = [(x, 1)] : -\epsilon < x < 0 \text{ eða } 0 < x < \epsilon\}.$$

Því er deildarúmið ekki Hausdorff-rúm.

Athugasemd
Athugasemdir í dæmatíma:

Setning 1.13 *Látum X, Y vera grannrúm, $\mathcal{B}$ vera grunn fyrir grannmynztrið á Y. Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld þ.þ.a.a. $f^{-1}[B]$ sé opið fyrir öll B úr $\mathcal{B}$.*

Látum X, Y vera grannrúm, A vera hlutmengi í X og $f : A \to Y$ vera samfelld vörpun. Myndum rúmið

$$X \coprod Y := (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y).$$

sem er kallað ***sundurlæga sammengið*** af X og Y; höfum varpanir $i_1 : X \to X \coprod Y$, $x \mapsto (1, x)$ og $i_2 : Y \to X \coprod Y$, $y \mapsto (2, y)$ og segjum að mengi U í $X \coprod Y$ sé opið ef $i^{-1}[U]$ er opið í X og $i_2^{-1}[U]$ er opið í Y. Skilgreinum svo jafngildisvenzl $\sim$ á $X \coprod Y$ sem eru minnstu jafngildisvenzl þ.a. $(1, a) \sim (2, f(a))$ fyrir öll a úr A. Segjum að $X \coprod Y/\sim$ sé rúmið sem fæst með því að líma X við Y með f.

Sýnidæmi 1.4.2 Skerum tvær opnar hringskífur með jaðra J_1 og J_2 út úr kúluhvelinu $\mathbb{S}_2$ köllum útkomuna Y; látum $X = \mathbb{S}_1 \times [0, 1]$ vera sívalningsflöt, $A = \mathbb{S} \times \{0, 1\}$ vera sammengið af endahringjunum og $f : A \to Y$ vera vörpun sem varpar $\mathbb{S}_1 \times \{0\}$ grannmóta á J_1 og $\mathbb{S}_1 \times \{1\}$ grannmóta á J_2. Rúmið sem fæst með því að líma X við Y með f segjum við að fáist með því að líma **handfang** á kúluflötinn. Þetta má endurtaka fá þannig kúluflöt með n handföngum, $n \in \mathbb{N}$. Í Möbíusarræmunni M sem fékkst úr $[-1, 1] \times [0, 1]$ með því að líma $[-1, y]$ við $[1, 1-y]$ fyrir öll y úr $[0, 1]$ er myndin af $[-1, 1] \times \{0, 1\}$ í M er grannmóta hring. Við getum nú tekið kúluhvel $\mathbb{S}_1$ og skorið út opna hringskífu með jaðar J og límt M við útkomuna með grannmótun $A \to J$. Þetta má líka gera endanlega oft, köllum svona límingu **krosshúfu**.

Segjum að grannflötur sé (samanhangandi) Hausdorff-rúm þ.a. sérhver punktur hafi grennd sem er grannmóta opinni hringskífu. Fyrir tvo fleti X og Y má velja lokaðar hringskífur í X með jaðar J_1 og í Y með jaðar J_2, fjarlægja samsvarandi opnar hringskífur U_1, U_2 og líma $X \setminus U_1$ við $Y \setminus U_2$ með hrannmótun $f : J_1 \to J_2$. (Viljum líka vita að við getum fundið teljanlegan grunn fyrir grannmynztrið). Þetta er þá nýr flötur sem er gjarnan táknaður

$$X \# Y.$$

Sýna má með vægum skilyrðum á X og Y er útkoman óháð öllu vali á hringskífum, burtséð frá grannmótunum.

Sýnidæmi 1.4.3 (**Enn eitt mikilvægt dæmi**): Látum $\sim$ vera minnstu jafngildisvenzl á kúluhvelinu $\mathbb{S}_n$ þ.a. $x \sim -x$ fyrir öll x úr $\mathbb{S}$. Deildarúmið

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) := \mathbb{S}/\sim$$

kallast $n-$-víða varprúmið yfir $\mathbb{R}$.

Reynir vill benda á frávik frá skilgreiningum í Munkres. Í bók er grennd um punkt x í X opið mengi sem inniheldur x. Hjá okkur er grennd um x í X mengi sem inniheldur opið mengi sem inniheldur x. Ef U er opið og $x \in U$, þá er U grennd um x; segjum þá að U sé **opin grennd** um x Munkres talar alltaf um opnar grenndir.

1.5 Nánar um margfeldi

Snúum okkur nú aftur að margfeldi. Margfeldisgrannmynztrið er í rauninni grófasta grannmynztrið sem gerir ofanvörpin samfelld. Þetta er svoldið hugsað eins og nykrun á deildagrannmynztri.

Setning 1.14 *Látum $(X_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af grannrúmum og*

$$X := \prod_{i\in I} X_i$$

vera margfeldi mengjafjölskyldunnar, þ.e. mengið af öllum fjölskyldum $(x_i)_{i\in I}$ þ.a. $x_i \in I$ fyrir öll i úr I. Fyrir i úr I höfum við i-ta ofanvarpið

$$pr_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i, \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto x_i.$$

Til er grófasta grannmynztur á $\prod_{i\in I} X_i$ þ.a. öll ofanvörpin pr_i séu samfelld. Grunnur fyrir þetta grannmynztur er mengi allra margfelda

$$\prod_{i\in I} U_i$$

þar sem $(U_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af opnum mengjum U_i í X_i þannig að $U_i = X_i$ fyrir öll nema endanlega mörg i úr I.

Sönnun
Ef við höfum grannmynztur $\mathcal{T}$ á X sem gerir ofanvörpin samfelld, þá verða mengin $\mathrm{pr}_i^{-1}[V]$ að vera opin fyrir öll i og öll opin mengi V í X_i; en

$$\mathrm{pr}_i^{-1}[V] = \prod_{j\in I} U_j$$

þar sem $U_i = V$ og $U_j = X_j$ fyrir $j \neq i$. Grófasta slíkt grannmynztur er það sem er spannað af slíkum mengjum, og grunnur fyrir það er mengi allra sniðmengja af **endanlega mörgum** slíkum mengjum og það eru einmitt mengin sem segir í setningunni.

Skilgreining 15 *Köllum $\prod_{i\in I} X_i$ með þessu grannmynztri margfeldi fjölskyldunnar $(X_i)_{i\in I}$*

Athugasemd
Við fáum annað grannmynztur á $\prod_{i\in I} X_i$ með því að taka sem grunn öll mengi

$$\prod_{i\in I} U_i$$

þar sem U_i er opið í X_i fyrir öll i úr I; köllum slíkt mengi **kassa** og grannmynztrið **kassagrannmynztrið**. Það er fínna en margfeldisgrannmynztrið. Ef I er endanlegt, þá eru kassagrannmynztrið og margfeldisgrannmynztrið það sama.

Skilgreining 16 $\mathbb{R}^\omega := \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ *þar sem* $X_i = \mathbb{R}$ *fyrir öll* i *úr* $\mathbb{N}$. *(Með margfeldisgrannmynztrinu).*

Athugasemd
Til er firð sem skilgreinir margfeldisgrannmynztrið á runurúminu, en ekki er til firð sem skilgreinir kassagrannmynztrið á runurúminu.

Setning 1.15 *Látum* $(X_i)_{i\in I}$ *vera fjölskyldu af grannrúmum og* $\prod_{i\in I} X_i$ *vera margfeldi hennar og* $pr_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ *vera* i*-ta ofanvarpið. Fyrir gefna fjölskyldu* $(f_i)_{i\in I}$ *af samfelldum vörpunum* $f_i : Y \to X_i$*, þar sem* Y *er eitthvert grannrúm, er til nákvæmlega ein samfelld vörpun* $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ *þ.a.* $f_i = pr_i \circ f$ *fyrir sérhvert* i *úr* I.

Sönnun
Ljóst er að f verður að vera gefið með $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$. Ef við nú skilgreinum f með þessari jöfnu, þá er f samfellt. Fyrir fjölskyldu $(U_i)_{i\in I}$ þ.a. U_i sé opið í X_i og $U_i = X_i$ fyrir öll nema endanlega mörg stök $i_1, ..., i_n$ úr I er

$$f^{-1}\left[\prod_{i\in I} U_i\right] = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}[U_i] = \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[U_{i_k}]$$

því að $f_i^{-1}[U_i] = Y$ ef $i \in I \setminus \{i_1 \cdots, i_n\}$. Þar með er $f^{-1}\left[\prod_{i\in I} U_i\right]$ opið í Y; en slík mengi $\prod_{i\in I} U_i$ mynda grunn fyrir grannmynstrið á $\prod_{i\in I} X_i$, svo að f er samfelld vörpun.

1.5.1 Runur

Skilgreining 17 *Látum* X *vera grannrúm,* $b \in X$ *og* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vera runu í* X*. Við segjum að runan* (a_n) *sé samleitin með margildi* b *ef fyrir sérhverja grennd* U *um* b *í* X *er til náttúruleg tala* n_0 *þ.a.* $a_n \in U$ *fyrir öll* $n \geq n_0$.

Sýnidæmi 1.5.1 Látum X vera grannrúm sem hefur fáfengilega grannmynstrið. Fyrir sérhvert b úr X og sérhverja runu (a_n) í X er (a_n) samleitin með margildi b. Sér í lagi er markgildið ekki ákvarðað ótvírætt ef X hefur fleiri stök en eitt.

Hins vegar gildir:

Setning 1.16 *Ef* X *er Hausdorff-rúm, þá ákvarðast markgildi runu ótvírætt.*

Sönnun
Látum X vera Hausdorff-rúm, (a_n) vera samleitna runu með tvö markgildi b_1 og b_2 þ.a. $b_1 \neq b_2$. Látum U_k vera grennd um b_k, $k = 1, 2$, þ.a. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Þá er til n_1 þ.a. $a_n \in U_1$ fyrir öll $n \geq n_1$ og n_2 þ.a. $a_n \in U_2$ fyrir $n \geq n_2$. Látum $n := \max\{n_1, n_2\}$ og fáum $a_n \in U_1 \cap U_2 = \varnothing$, en það er fráleitt, svo $b_1 = b_2$.

Skilgreining 18 *Við segjum að grannrúm X sé firðanlegt ef til er firð á X þ.a. grannmynstrið á X sé það sem firðin gefur af sér.*

Athugasemd
Venjulega eru þá til margar firðir sem skilgreina grannmynstrið. Við segjum að tvær firðir á X séu jafngildar ef þær skilgreina sama grannmynstrið.
Sérhver firð d er jafngild takmarkaðri firð, t.d. er d jafngild firðinni

$$d_1 := \frac{d}{1+d}$$

og $d_1(x, y) < 1$ fyrir öll x, y úr X.
Til að sjá að d_1 sé firð, athugum við að

$$[0, +\infty[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{x}{1+x}$$

er (strangl.)vaxandi, svo að

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,x)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d_1(x,y) + d_1(y,z) \end{aligned}$$

Firðirnar d og d_1 hafa sömu kúlurnar, nema hvað kúlurnar með geisla ≥ 1 m.t.t. firðarinnar d_1 eru allt rúmið. Kúla með geisla r í firðinni d er kúla með geilsa $\frac{r}{1+r}$ í firðinni d_1. Því skilgreina d og d_1 sama grannmynstrið.

Setning 1.17 *Látum $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu af firðanlegum grannrúmum. Þá er margfeldið $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ firðanlegt.*

Sönnun
Látum d_n vera firð á X_n sem skilgreinir grannmynstrið á X_n fyrir öll n úr $\mathbb{N}$. Fyrir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ úr $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ setjum við

$$d(x,y) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$$

þá er auðséð að d skilgreinir firð á $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Látum nú U vera grennd um $x = (x_n)$ í margfeldisgrannmynstrinu. Hún inniheldur mengi

$$U_0 \times \cdots \times U_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \cdots$$

þar sem $U_k = \{y_k \in X_k, \; d_k(x_k, y_k) < r_k\}$ fyrir $k = 0, ..., N$. Veljum $\epsilon > 0$ þ.a.

$$2^n \cdot \epsilon < 1 \quad \text{og} \quad \frac{2^n \cdot \epsilon}{1 - 2^n \cdot \epsilon} < r_k \quad \text{fyrir } k = 0, ..., N.$$

Ef $y = (y_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ og $d(x, y) < \epsilon$, þá er

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \leq d(x, y) < \epsilon$$

svo $d_n(x_n, y_n) < r_k$ og því er $y \in U$; þ.e. kúlan um x með geisla ϵ.
Öfugt, ef B er opin kúla um x með geilsa $\epsilon > 0$, vel N þ.a. $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ og $r_k > 0$ fyrir $k = 0, ..., N$ þ.a.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{r_k}{1 + r_k} < \epsilon$$

Látum $B_n(x_n, r_k)$ vera kúluna í X_n um x_n með geisla r_k, þá er

$$B_0(x_0, r_0) \times \cdot \times B_N(x_N, r_N) \times X_{N+1} \times \cdots$$

grennd í margfeldisgrannmynstrinu sem er innihaldin í kúlunni með geisla ϵ um x í firðinni d.

1.5.2 Smá athugasemd um deildagrannmynztur

Setning 1.18 *Látum X vera grannrúm, $\sim$ vera jafngildinsvenzl á X, $\pi : X \to X/\sim$ vera ofanvarpið á rúmið $X/\sim$ með deildagrannmynztrinu. Ef $f : X \to Y$ er samfelld vörpun sem er föst á sérhverjum jafngildisflokki, þá er til nákvæmlega ein samfelld vörpun $g : X/\sim :\to Y$ þannig að örvarit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \overset{\pi}{\searrow} & \uparrow g \\ & & X/\sim \end{array}$$

sé víxlið, þ.e. $f = g \circ \pi$.

Sönnun
Ljóst að til er nákvæmlega ein slík vörpun. Til að sjá að hún er samfelld: Ef V er opið í Y, þá er $\pi^{-1}[g^{-1}[V]] = f^{-1}[V]$ opið í X, en það þýðir að $g^{-1}[V]$ er opið í $X/\sim$.

1.5.3 Firðanleg grannrúm

Sýndum síðast: Ef $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er runa af firðanlegum grannrúmum, þá er margfeldið $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (með margfeldisgrannmynztrinu) firðanlegt. Sér í lagi er $\mathbb{R}^\omega$ firðanlegt. En $\mathbb{R}^\omega$ með kassa grannmynztrinu er **ekki** firðanlegt. Athugum fyrst þekkta setningu um firðrúm

Setning 1.19 *Látum X vera firðrúm og $A \subset X$. Fyrir $x \in X$ gildir $x \in \overline{A}$ þ.þ.a.a. til sé runa (a_n) í A þ.a. $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$.*

Sönnun
Ef til er runa (a_n) í A þ.a. $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$ og U er grennd um x, þá er til n_0 þ.a. $a_n \in U$ fyrir öll $n \geq n_0$, svo að $U \cap A \neq \varnothing$. En þá er $x \in A$.

Látum nú $x \in \overline{A}$. Ef $n \in \mathbb{N}$ þá er opna kúlan $B(x, \frac{1}{2^n})$ opin grennd um x, svo að $B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A \neq \varnothing$. Veljum $a_n \in B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A$ fyrir sérhvert n og fáum $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$, vegna $d(x, a_n) < \frac{1}{2^n}$.

Athugasemd
Athugum að fyrri partur sönnunarinnar gildir í öllum grannrúmum, því hann þurfti ekki firðina, en seinni parturinn gildir ekki almennt í öllum grannrúmum.

Athugum nú $\mathbb{R}^\omega$ með kassagrannmynztrinu. Mengið $A := \prod_{n\in\mathbb{N}}]0, +\infty[= \{(x_n) \in \mathbb{R}^\omega : \ x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ er opið í $\mathbb{R}^\omega$. Við höfum $0 \in \overline{A}$, því að sérhver grennd um 0 inniheldur $\prod_{n\in\mathbb{N}}]-\epsilon_n, \epsilon_n[$ fyrir einhverja runu (ϵ_n) þ.a. $\epsilon_n > 0$ fyrir öll $n\mathbb{N}$. Og þá er $a := (\frac{1}{2}\epsilon_n)$ í A og í grenndinni. Hins vegar er engin runa til af stökum í A sem stefnir á 0. G.r.f. að (a_n) sé runa í A. Fyrir hvert n er

$$a_n = (a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}, \quad a_{nk} > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Setjum $\epsilon_n := a_{nn}$. Þá er

$$U := \prod_{n\in\mathbb{N}}]-\epsilon_n, \epsilon_n[$$

opin grennd um 0 sem inniheldur ekkert stak úr rununni (a_n), því að $a_{nn} \notin][-\epsilon_n, \epsilon_n$. Því getur (a_n) ekki stefnt á 0.

Afleiðing: $\mathbb{R}^\omega$ með kassagrannmynztrinu er ekki firðanlegt.

Kafli 2

Samanhangandi grannrúm

2.1 Undirstöðuatriði

Skilgreining 19 **Opin tvískipting** *á grannrúmi* X *er mengi* $\{U, V\}$ *af opnum hlutmengjum* U, V *í* X *þ.a.* $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$ *og* $U \cup V = X$. *Við segjum að* X *sé* **samanhangandi** *ef það hefur enga opna tvískiptingu.*

Athugasemd
Grannrúm X er samanhangandi þá og því aðeins að $\varnothing$ og X séu einu hlutmengin í X sem eru bæði opin og lokuð: Ef A er eitthvað annað hlutmengi í X sem er bæði opið og lokað, þá er $\{A, X \setminus A\}$ opin tvískipting.

Skilgreining 20 $f : X \to Y$ *er* ***föst*** *þ.þ.a.a.* $f(x) = f(y)$ *fyrir öll* x, y *úr* X. *Ef* $Y \neq \varnothing$ *þá er jafngilt að til sé* y *í* Y *þ.a.* $f(x) = y$ *fyrir öll* x *úr* X.

Grannrúm X er samanhagandi þ.þ.a.a. sérhver samfelld vörpun frá X í strjált rúm sé föst: Ef $f : X \to Y$ er samfelld vörpun vörpun, X samanhangandi Y strjált og $x_1, x_2 \in X$ eru þannig að $f(x_1) \neq f(x_2)$, þá er $\{U, V\}$ þar sem $U := f^{-1}[\{x_1\}]$ og $V := f^{-1}[\{x_2\}]$ opin tvískipting á X. Ef hinsvegar X er ekki samanhangandi, þá er til tvískipting $\{U, V\}$ og við fáum samfelld vörpun $f : X \to \{0, 1\}$, þar sem $\{0, 1\}$ hefur strjála grannmynztrið, með $f|U = 0$ og $f|V = 1$.

Sýnidæmi 2.1.1

1. Höfum vörpun $f : X \to \mathbb{C}$. Ef e^f er fast, X samanhangandi, þá er f fast, því $\exp^{-1}[c]$ er strjált.
2. Látum $f, g : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, þ.a. $f^2 = g^2$, þá er $\frac{f}{g} : X \to \{1, -1\}$.

Skilgreining 21 *Hlutmengi* A *í grannrúmi* X *kallast* **samanhangandi** *ef það er samanhangandi með grannmynztrinu sem það fær sem hlutrúm í* X.

Setning 2.1

1. *Ef $(A_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af samanhangandi hlutmengjum í X, $I \neq \varnothing$, og $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, þá er $\bigcup_{i\in I} A_i$ samanhangandi.*
2. *Ef A er samanhangandi hlutmengi í grannrúmi X, þá er $\overline{A}$ samanhangandi.*

Sönnun

1. Gerum ráð fyrir að svo sé ekki og að til sé opin tvískipting $\{U, V\}$ á $\bigcup_{i\in I} A_i =: A$ með opnum hlutmengjum í A; látum $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ og gerum ráð fyrir að $x \in U$, og veljum $y \in V$. Þá er til i úr I þ.a. $y \in A_i$, og við sjáum að $\{U \cap A_i, V \cap A_i\}$ verður opin tvískipting á A_i, í mótsögn við að A_i er samanhangandi.
2. Ef $\{U, V\}$ væri opin tvískipting á $\overline{A}$, þá væri $\{U \cap A, V \cap A\}$ opin tvískipting á A.

Setning 2.2 *Hlutmengi í rauntölunum er smanhangandi þá og því aðeins að það sé bil.*

Aðeins almennara en það sem við vorum að gera

Setning 2.3

1. *Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af samanhangandi hlutmengjum í grannrúmi X þ.a. $A_j \cap A_k \neq \varnothing$ ef $j \neq k$, þá er mengið $\bigcup_{i\in I} A_i$ samanhangandi.*
2. *Ef A er samanhangandi hlutmengi í X og $A \subset B \subset \overline{A}$, þá er B samanhangandi.*

Sönnun

1. Látum $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to Y$, þar sem Y er strjált. Þá er $f|A_i$ fast, og vegna $A_j \cap A_k \neq \varnothing$ ef $j \neq k$, þá er fastinn sá sami fyrir öll $i \in I$, svo að f er fast.
2. Eins og fyrir $B = \overline{A}$.

Athugasemd

Afleiðing: Fyrir x stak í grannrúmi X er sammengi allra samanhangandi hlutmengja í X sem innihalda x sem stak samanhangandi og lokað; og það er stærsta hlutmengi í X sem er samanhangandi og inniheldur x sem stak.

Skilgreining 22 *Látum x vera stak í grannrúmi X. Stærsta samanhangandi hlutmengi í X sem inniheldur x sem stak kallast* **samhengisþáttur** *punktsins x í rúminu X.*

Ef C er samhengisþáttur x í X og $y \in C$, þá er C stærsta samanhangandi hlutmengi sem inniheldur y, annars væri til stærra samanhangandi hlutmengi í X sem inniheldur y og þar með líka x. Því er C líka samhengisþáttur punktsins y í X. Höfum:

Setning 2.4 *Samhengisþættir puktanna í X mynda deildaskiptingu mengisins X.*

Skilgreining 23 *Grannrúm er* **algjörlega ósamanhangandi** *ef allir samhengisþættir þess eru einstökungar. Þ.e. samhengisþáttur punkts x í X er $\{x\}$.*

Setning 2.5 *Látum $\sim$ vera jafngildisvenzlin á X sem samsvara deildaskiptingunni í samhengisþætti, þá er deildarúmið $X/\sim$ algjörlega ósamanhangandi.*

Þessi setning er **afleiðing** af:

Setning 2.6 *Látum $\sim$ vera jafngildisvenzl á grannrúmi X þ.a. allir jafngildisflokkarnir séu samanhangandi og $X/\sim$ sé samanhangandi, þá er X samanhangandi.*

Sönnun
Fyrri setning afleiðing af síðari: $X/\sim$ hefði hlutmengi B sem er samanhangandi en ekki einstökungur, þá væri $Y := \bigcup_{C\in B} C$ hlutrúm í X og ofanvarpið $\pi : X \to X/\sim$ gefur af sér vörpun $Y \to B$ þar sem trefjarnar eru samhengisþættirnir sem eru stök í B, og þá væri Y samanhangandi, sem er fráleitt nema B sé einstökungur.

Sönnun
Sönnun seinni setningar: Látum $f : X \to Y$ vera samfellda vörpun yfir í strjált rúm Y. Hún er föst á jafngildisflokkunum, svo að setning frá síðast gefur samfellda vörpun $g : X/\sim \to Y$ þ.a. $f = g \circ \pi$. Þar sem $X/\sim$ er samanhangandi er g föst, svo að f er föst.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & X/\sim \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Sýnidæmi 2.1.2 1. Sérhvert strjált grannrúm er algjörlega ósamanhangandi. En $\mathbb{Q}$ er algjörlega ósamanhangandi.

2. **Cantor-mengið**

$$C := \left\{ \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} : \quad a_n \in \{0,1\} \right\}$$

er lokað og takmarkað í $\mathbb{R}$, óteljanlegt og hefur enga einangraða punkta; en það er algjörlega ósamanhangandi.

Vel þekkt er:

Setning 2.7 *Fyrir hlutmengi A í $\mathbb{R}$ er jafngilt*

1. *A er samanhangandi.*
2. *Ef $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y < z$ og $x, z \in A$, þá er $y \in A$.*
3. *A er bil.*

Athugasemd
Hér teljum við $]a, a[= \varnothing$ og $\{a\} = [a, a]$ til vila. Sér í lagi er bilið $[0, 1]$ samanahangandi.

Setning 2.8 *Ef X er samanhangandi grannrúm og $f : X \to Y$ er samfelld vörpun frá X í grannrúm Y, þá er myndin $f[X]$ samanhangandi hlutmengi í Y.*

Sönnun
Annars hefði $f[X]$ opna tvískiptingu $\{U, V\}$, og þá væri $\{f^{-1}[U], f^{-1}[V]\}$ opin tvískipting rúmsins X.

Skilgreining 24

1. *Látum X vera grannrúm. Við segjum að X sé* **ferilsamanhangandi** *ef fyrir sérhverja tvo punkta p, q í X er til* **ferill** *frá p til q í X; það er skv. skilgreiningu samfelld vörpun $\alpha : [0, 1] \to X$ þ.a. $\alpha(0) = p$ og $\alpha(1) = q$.*
2. *Látum X vera grannrúm, $x \in X$.* **Ferilsamhengisþáttur** *punktsins x í X er mengi allra punkta q í X þ.a. til sé ferill frá x til q í X.*

Setning 2.9

1. *Ferilsamanhangandi rúm er samanhangandi.*
2. *Ferilsamhengisþættir grannrúms mynda deildaskiptingu þess.*

Sönnun
Augljós.

Langalínan

Sýnidæmi 2.1.3 ***Langa(hálf)línan***
Við getum skilgreint náttúrlegu tölurnar í mengjafræði þannig:

$$
\begin{aligned}
&0 := \varnothing \\
&1 := \{0\} = \{\varnothing\} \\
&2 := \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

þ.a. sérhver náttúrleg tala er mengi allra minni náttúrlegra talna, má orða svo:

$$0 := \varnothing,\ 1 = 0^+,\ 2 = 1^+, \ldots$$

Þar sem $A^+ := A \cup \{A\}$. Látum nú ω vera mengi náttúrlegu talnann, lítum á það sem nýja tölu sem er stærri en allar náttúrlegar tölur. Setjum svo

$$\begin{aligned}
&\omega + 1 := \omega^+ \\
&\omega + 2 := (\omega + 1)^+ \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Næst á eftir öllu þessu kemur svo $\omega 2$. **Hugmyndin**: Þegar einhverjar raðtölur hafa verið búnar til, þá bætum við einni við með því að taka mengi þeirra sem á undan eru komnar. Fáum

$$\begin{aligned}
&0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2, ..., \omega 2, \omega 2 + 1, ..., \\
&\omega 3, \omega 3 + 1, ..., \\
&\omega 4, \omega 4 + 1, ... \\
&\omega^2 . \omega^2 + 1, ... \\
&\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, ... \\
&\vdots \\
&\omega^3, \omega^3, \omega^3 + 1, ... \\
&\omega^3 + \omega, \omega^3 + \omega + 1, ... \\
&\vdots \\
&\omega^4, ... \\
&\vdots \\
&\omega^\omega, \omega^\omega + 1, ... \\
&\vdots \\
&\omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^\omega} + 1, ...
\end{aligned}$$

Skilgreining 25 1. *Segjum að mengi α sé **gegnvirkt** ef sérhvert stak í α er hlutmengi í α; þ.e. ef $\beta \in \alpha$ og $\gamma \in \beta$, þá er $\gamma \in \alpha$.*

2. *Mengi α kallast **raðtala** ef það er gegnvirkt mengi og sérhvert stak í α er líka gegnvirkt mengi.*

3. *Látum α, β vera raðtölur. Segjum að β sé **minna en** α og skrifum*

$$\beta < \alpha$$

ef $\beta \in \alpha$. Segjum að

$$\beta \leq \alpha$$

ef $\beta < \alpha$ eða $\beta = \alpha$.

Setning 2.10

1. *Ef α er raðtala, þá er sérhvert stak í α raðtala.*

2. *Ef α er raðtala og $\beta \in \alpha$, þá er $\beta \subset \alpha$.*

3. *Ef α er raðtala þá er*

$$\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$$

líka raðtala.

4. *Ef α, β eru raðtölur og $\alpha^+ = \beta^+$, þá er $\alpha = \beta$.*

5. *Ef $(\alpha_i)_{i \in I}$ er fjölskylda af raðtölum, þá er $\bigcup_{i \in I}$ raðtala.*

6. *Sérhver náttúrleg tala er raðtala.*

Athugasemd
Liður (6) byggist á að við höfum skilgreint $\mathbb{N}$ sem minnsta mengi A þ.a. $0 := \varnothing \in A$ og þannig að fyrir $x \in A$ sé $x^+ := x \cup \{x\} \in A$.

Sönnun
Sönnunin er mjög auðveld.

Til að tala um raðtölur þarf:

Setning 2.11 ***Regluleikafrumsenda***: *Ef A er mengi, $A \neq \varnothing$, þá er til stak B í A þ.a. $B \cap A = \varnothing$.*
Jafngilt er:
Ef X er mengi, þá er ekki til óendanleg runa $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, þ.a. $X_0 \in X$ og $X_{n+1} \in X_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ þ.e.

$$X \ni X_0 \ni X_1 \ni X_2 \ni \ldots$$

Með regluleikafrumdendunni má sanna:

Setning 2.12 *Látum α, β, γ vera raðtölur, þá gildir:*

1. *$\alpha \leq \alpha$.*

2. *Ef $\alpha \leq \beta$ og $\beta \leq \gamma$, þá $\alpha \leq \gamma$.*

3. *Ef $\alpha \leq \beta$ og $\beta \leq \alpha$, þá $\alpha = \beta$.*

4. *Annaðhvort er $\alpha \leq \beta$ eða $\beta \leq \alpha$.*

Setning 2.13 *Sérhvert mengi af raðtölum sem er ekki tómt inniheldur minnsta stak m.t.t. þessarar röðunnar.*

Skilgreining 26 ***Velröðun*** *á mengi X er línuleg röðun á X þannig að sérhvert hlutmengi í X sem er ekki tómt hafi minnsta stak.*

Svo við höfum velröðun á sérhverju mengi af raðtölum. Sérhver raðtala er velraðað mengi.

Setning 2.14 ***Velröðunarsetning Zermelo****: Sérhvert mengi hefur velröðun.*

Skilgreining 27 ***Einsmótun*** *raðaðra mengja $(A, \leq_1)$ og $(B, \leq_2)$ er gagntæk vörpun $f : A \to B$ þ.a.*

$$f(x) \leq_2 f(y) \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad x \leq_1 y.$$

Setning 2.15 *Sérhvert velraðað mengi er einsmóta nákvæmlega einni raðtölu.*

Látum nú X vera óteljanlegt mengi. Það hefur velröðun, og er einsmóta raðtölu, sem raðað mengi, svo að til er óteljanleg raðtala α. En mengi allra óteljanlegra raðtalna $\leq \alpha$ er þá ekki tómt, svo að til er **minnsta óteljanlega raðtalan**. Köllum hana Ω. Þurfum bara að vita eftirfarandi:

1. Ω er óteljanlegt velraðað mengi.
2. Fyrir sérhvert x úr Ω er $\{y \in \Omega : y \leq x\}$.

Athugum nú

$$L := \Omega \times [0, 1[$$

með stafrófsröðinni, þ.e.

$$(\alpha, x) < (\beta, y) \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad \alpha < \beta \quad \text{eða} \quad (\alpha = \beta \;\text{ og }\; x < y).$$

Nú má búa til grannmynztur á L. Almennt má búa til grannmynztur á línulega röðuðu mengi X með því að taka sem grunn eftirfaradi mengi:

1. Öll opin bil $]x, y[$, þar sem $x, y \in X$ og $x < y$.
2. Ef X hefur minnsta stak m, öll hálfopin bil $[m, x[$, $x \in X$ og $m < x$.
3. Ef X hefur stærsta stak s, öll hálfopin bil $]x, s]$, $s \in X$ og $x < s$.

Athugum að $\mathbb{N} \times [0, 1[$ með stafrófsröð gefur $[0, +\infty[$:

$$[0, 1[\cup [1, 2[\cup \cdots$$

það er grannmóta $[0, 1[$. Mengið L með grannmynztrinu sem stafrófsröðin gefur af sér, kallast **langa-hálflínan** og $L \cup \{\Omega\}$ þ.a. $x < \Omega$ f.öll x úr L, er þá **útvíkkaða lokaða langa-hálflínan**. Við getum litið á þetta eins og með $\mathbb{N} \times [0, 1[$, nema hvað við bætum alltaf við óteljanlega mörgum bilum. Við höfum:

Setning 2.16 *Látum $x \in L$. Þá er*

$$[0, x] := \{y \in L : 0 \le y \le x\}$$

grannmóta $[0, 1]$. Sér í lagi er L ferilsamanhangandi. En útvíkkaða langa-hálflínan er samanhangandi, en ekki ferilsamanhangandi. Ef $\gamma : [0, 1[\to L$ er samfelld vörpun, þá er til $x \in L$ þ.a. $\gamma([0, 1[) \subset [0, x]$.

Athugasemd

Athugasemdir í dæmatíma við dæmi 9: Látum G vera grúpu, X vera mengi. Verkun grúpunnar G á menginu X er vörpun $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ þannig að

$$ex = x, \quad (gh)x = g(hx)$$

fyrir öll g, h úr G, $x \in X$. Hér er e hlutleysan í G. Jafngild lýsing er: Vörpunin $\varphi_g : X \to X$, $x \mapsto gx$ er gagntæk, því að hún hefur andhverfu $\varphi_{g^{-1}}$: Við höfum $\varphi_g(\varphi_{g^{-1}}(x)) = gg^{-1}x = ex = x$; eins $\varphi_{g^{-1}}$; eins $\varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(x)) = x$. Höfum grúpuna $G \to \mathfrak{S}_X$, $g \mapsto \varphi_g$, $\mathfrak{S}_X$ er grúpa gagntækra varpana $X \to X$. Í dæminu er $G = \{-1, 1\}$.

Skilgreining 28 ***Granngrúpa*** *er grúpa G sem er líka grannrúm þ.a. $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ og $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ séu samfelldar varpanir. Getum þá talað um* ***samfellda*** *verkun granngrúpu á grannrúmi. Ef $G \times X \to X$ er samfelld verkun, (þar sem $G \times X$ er með margfeldisgrannmynztrinu), þá er $\varphi_g : X \to X$, $x \mapsto gx$ grannmótun.*

Ef $G \times X \to X$ er samfelld verkun á X og $X \in X$ þá er

$$Gx := \{gx : g \in G\}$$

braut *staksins x m.t.t. verkunarinnar. Brautirnar mynda deildaskiptingu á X sem samsvarar jafngildisvenzlunum $\sim$ á X, þar sem*

$$x \sim y \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad x = gy.$$

Fáum þá ***brautarúm****: Stökin eru brautirnar og við setjum á það deildagrann-mynztrið. Samfelld verkun margföldunargrúpunnar $\{-1, 1\}$ á grannrúmið X er gefin með samfelldri vörpun $g : X \to X$ þ.a. $g \circ g = id_X$ og þá $g^{-1} = g$.* ***Samfellt hreyfirkerfi*** *er verkun $(\mathbb{R}, +)$ á grannrúm. Til dæmis ef við höfum vigursvið og hliðrum punktum eftir lausnarferlum deildajafna. Ef við tökum $\mathbb{Z}$, þá fáum við* ***strjált hreyfikerfi****, þessi grúpa er spönnuð einu staki, þannig að vörpun hennar er bara gefin með einni vörpun, ef $1 \mapsto \varphi$, þá $n \mapsto \varphi^n$.*

2.1.1 Þétt mengi og Baire mengi

Skilgreining 29 *Látum X vera grannrúm.*

1. *HLutmengi A í X er sagt vera* ***þétt í*** *X ef $\overline{A} = X$.*

2. *Hlutmengi A í X er sagt vera* ***hvergi þétt í*** *X ef $\overset{\circ}{\overline{A}} = \varnothing$.*
3. *Hlutmengi A í X er agt vera* ***magurt*** *ef það er sammengi teljanlega margra hlutmengja í X sem eru hvergi þétt í X.*

Rifjum upp:

Setning 2.17 *Látum X vera fullkomið firðrúm og (A_n) vera fallandi runu af lokuðum hlutmengjum í X þannig að $\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$. Þá hefur sniðmengið $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nákvæmlega einn punkt.*

Athugasemd
Hér er $\delta(A_n)$ þvermál mengisins A_n og er skilgreint með

$$\delta(A) := \sup \{d(x,y) \ : \ x, y \in A\}$$

Sönnun
Sönnunin er auðveld. Veljum stak x_n úr A_n; af skilyrðinu $\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$ leiðir að runan (x_n) er Cauchy-runa; markgildið $x := \lim_{n\to+\infty} x_n$ er í sérhverju mengjanna A_n, því að þau eru lokuð, og því $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Setning 2.18 *(Baire) Ef A er magurt hlutmengi í fullkomnu firðrúmi X, þá er fyllimengið $X \setminus A$ þétt í X.*

Sönnun
Látum V vera opið í X, $V \neq \varnothing$. Við þurfum að sýna að $V \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$. Skrifum $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, A_n hvergi þétt í X; megum gera ráð fyrir að A_n sé lokað og hafi enga innri punkta (annars lokum við bara A_n, sem getur bara stækkað A). Nú er $X \setminus A_0$ opið og þétt svo að $V \setminus A_0 \neq \varnothing$. Veljum punkt x_0 úr $V \setminus A_0$ og opna kúlu B_0 um x_0 þannig að $\overline{B}_0 \subset V \setminus A_0$ og $\delta(\overline{B}_0) < 1$. Nú er $B_0 \setminus A_1 \neq \varnothing$, svo að til er opin kúla B_1 þannig að $\overline{B}_1 \subset B_0 \setminus A_1$ og $\delta(\overline{B}_1) < 1/2$. Með þrepun fæst minnkandi runa (B_n) af opnum kúlum þannig að $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \setminus A_{n+1}$ og $\delta(\overline{B}_{n+1}) < 1/(n+1)$. Samkvæmt setningu er til stak X úr $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Þá er $x \notin A_n$ fyrir öll n og þá $x \in V \setminus A$.

Eftirfarandi er ljóst:

Setning 2.19 *Fyrir grannrúm X er eru eftirfarandi fjögur skilyrði jafngild:*

1. *Fyllimengi magurs mengis í X er þétt í X.*

2. *Teljanlegt sniðmengi opinna hlutmengja í X sem eru öll þétt í X er líka þétt í X.*

3. *Teljanlegt sammengi lokaðra hlutmengja án innri punkta í X hefur engan innri punkt.*

4. *Hlutmengi í X sem er opið og ekki tómt er ekki magurt.*

Skilgreining 30 *Segjum að X é **Baire-rúm** ef það fullnægir einu og þar með öllum af ofantöldum skilyrðum.*

Sýnidæmi 2.1.4 (Leki Cantor-tjaldið) Látum C vera Cantor-mengið,

$$C = \left\{ \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} \ : \ a_n \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

og

$$A = \text{mengi endapunkta fjarlægðu bilanna ásamt 0 og 1}.$$

Þá er A teljanlegt og $\overline{A} = C$. Setjum $I := C \setminus A$. Fyrir $x \in \mathbb{R}$ látum við ℓ_x vera strikið frá x til $p := \frac{1}{2} + i$ í $\mathbb{C}$.

Setjum

$$X_A := \bigcup_{x \in A} \ell_x, \quad X_I := \bigcup_{x \in I} \ell_x,$$

og skilgreinum mengin Y_A, Y_I og Y með

$$\begin{aligned} Y_A &:= \{x + iy \in X_A : y \in \mathbb{Q}\} \\ Y_I &:= \{x + iy \in X_I : y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup 0, 1\} \\ Y &:= Y_I \cup Y_A. \end{aligned}$$

Köllum Y **leka Cantor-tjaldið**; lítum á það sem hlutrúm í $\mathbb{C}$.

Setning 2.20 *Rúmið Y er samanhangandi, en $Y \setminus \{p\}$ er algjörlega ósamanhangandi.*

Sönnun
G.r.f að Y sé ekki samanhangandi. Þá eru til opin mengi U, V í $\mathbb{C}$ þannig að $U \cap V = \varnothing$, $U \cap Y \neq \varnothing$, $Y \cap V \neq \varnothing$ og $Y \subset U \cup V$ (heimadæmi !). Veljum nöfnin á U, V þannig að $p \in U$. Skilgreinum $f, g : C \to [0,1]$ þannig: Setjum $W(r) := \{x + iy : y > r\}$, $f(x) := \inf\{r : W(r) \cap \ell_x \in U\}$ og látum $g(x)$ ákvarðast af $g(x) + if(x) \in \ell_x$; þ.e. $g(x) + if(x)$ er eftsi punkturinn á ℓ_x sem er ekki í U. Látum $z \in Y \cap V$. Þá er til heil grennd um z í $\mathbb{C}$ sem sker ekki U. Ef π táknar ofanvarpið

$$\{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [0,1[\} \to \mathbb{R} \text{ útfrá } p$$

sem varpar $\ell_x \setminus \{p\}$ á X, þá er π **opin** og samfelld vörpun svo að til er grennd um $\pi(z)$ í C þannig að $f(x) > 0$ fyrir öll x úr W. Nú inniheldur W hlutrúm C' í C sem er grannmóta (meira að segja einslega) C. Getum þá gert ráð fyrri að $f(x) > 0$ fyrir öll x úr C; annars athugum við C' í stað C. Fyrir $x \in C$ er $g(x) + if(x)$ hvorki í U né í V og því ekki í Y. Þar með fæst:

$$\text{Ef } x \in I, \text{ þá er } f(x) \in \mathbb{Q}, \text{ ef } x \in A \text{ þá er } f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Setjum $Z := \{g(x) + if(x) : x \in I\}$. Þá er $\overline{Z} \subset X := X_A \cup X_I$, sem er lokað, og þar sem Z sker ekki $U \cup V$ gerir $\overline{Z}$ það ekki heldur. Fyrir $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ setjum við

$$Z(q) := \pi[\overline{Z} \cap (\mathbb{R} + iq)];$$

þá er $Z(q) \subset I$ því það stökin úr $\ell_x \cap (\mathbb{R} + iq)$ þ.a. $x \in A$ eru í Y og því ekki í Z. Mengin $Z(q)$ eru lokuð í C, því að π gefur grannmótun $\mathbb{R} + iq$ á $\mathbb{R}$, og $\overline{Z} \cap (\mathbb{R} + iq)$ er lokað.

En nú er ljóst að $\displaystyle\bigcup_q Z(q) = I$. Þar með er

$$C = \left(\bigcup_q Z(q)\right) \cup \left(\bigcup_{a \in A} \{a\}\right),$$

og þetta er teljanlegt sammengi af lokuðum mengjum. Skv-Baire-setningu inniheldur eitt þeirra hlutmengi W sem er opið í C. Það getur ekki verið eitt af mengjunum $\{a\}, a \in A$. Þá hlýtur að vera til q þannig að $W \subset Z(q) \subset I$, þ.e. $W \cap A = \varnothing$; sem er fráleitt vegna þess að A er þétt í C.Höfum sýnt að Y er samanhangandi.

Til að sjá að $Y \setminus \{p\}$ sé algjörlega ósamanhangandi: G.r.f. að $A \subset Y \setminus \{p\}$, $A \neq \varnothing$, og A samanhangandi. En C er aljörlga ósamanhangandi, svo að $\pi[A] = \{x\}$. En þá er

$$A \subset \ell_x \cap Y = \begin{cases} \ell_X \cap (\mathbb{R} + i\mathbb{Q}) \\ \ell_x \cap ((\mathbb{R} + i(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{x\}) \end{cases}$$

og þessi mengi eru algjörlega ósamanhangandi, svo að A er einstökungur.

Skilgreining 31 *Við segjum að grannrúm X sé* **staðsamanhangandi** *ef sérhver grennd um sérhvern punkt x í X inniheldur samanhangandi grennd um x; við segjum að X sem* **staðferilsamanhangandi** *ef sérhver grennd um sérhvern punkt x í X inniheldur ferilsamanhangandi grennd um x.*

Sýnidæmi 2.1.5 Hárgreiðan $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{\frac{1}{2^n}\} \times [0, 1])$ er ferilsamanhangandi en ekki staðsamanhangandi, skoðum bara punkta á y-ásnum og grenndir um þá.

Setning 2.21 *Grannrúm X er staðsamanhangandi þá og því aðeins að samhengisþættir allra opinna hlutmengja í X séu opin mengi í X.*

Sönnun
Gerum ráð fyrir að X sé staðsamanhangandi. Látum U vera opið í X og V vera samhengisþátt U. Fyrir $x \in V$ er U grenndum x og inniheldur þá samanhangandi grennd V_1 um x. Þar sem $x \in V_1$ og V_1 samanhangandi er $V_1 \subset V$ svo að V er grennd um x í X. Þar með er V opið í X. Öfugt ef skilyrðinu er fullnægt, $x \in X$ og V er grennd um x, þá inniheldur V opna grennd W um x, samhengisþáttur x í W, köllum hann U, er opið skv.forsendu og þá samanhangandi opin grennd um x þ.a. $U \subset V$.

Setning 2.22 *Samanhangandi og staðferilsamanhangandi grannrúm X er ferilsamanhangandi.*

Sönnun
(Uppkast) Látum p vera fastan punkt í X og U vera mengi allra punkta q í X sem má tengja við p með ferli. Ef $q \in U$, þá vel ég ferilsamanhangandi grennd V um q, látum α vera feril frá p til q og fyrir $x \in V$ má tengja x við q með ferli; skeytum ferlunum saman til að fá feril frá p til x. Þá er $V \subset U$ og U opið. Ef $q \notin U$, þá finnum við aftur ferilsamanhangandi grennd V um q. Þá er $V \subset X \setminus U$, annars mætti tengja x úr V og halda áfram með ferli frá x til q í mótsögn við að $q \notin U$. Þar með er U bæði opið og lokað, $U \neq \varnothing$ vegna þess að $p \in U$, og þá $U = X$.

Kafli 3

Þjöppuð rúm

3.1 Upprifjun

Munum eftir að í firðrúmi X eru eftirfarandi tvö skilyrði jafngild

1. Sérhver runa í X hefur samleitna hlutrunu.
2. Sérhver opin þakning rúmsins X hefur endanlega hlutþakningu.

Hins vegar er þetta ekki jafngilt í grannrúmum, þar gildir seinna skilyrðið fyrir þjöppuð rúm, en ekki nauðsynlega það fyrra.

3.2 Þjöppuð grannrúm

Skilgreining 32 *Við segjum að grannrúm X sé* **þjappað** *ef sérhver opin þakning þess hefur endanlega hlutþakningu, m.ö.o. er grannrúm X þjappað þá og því aðeins að fyrir sérhverja fjölskyldu $(U_i)_{i\in I}$ af opnum hlutmengjum í X sem er þ.a. $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ er til endanlegt hlutmengi J í I þ.a. $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.*

Athugasemd
Í Frakklandi og víðar er rúm kallað **hálfþjappað** (quasi-compact) ef það hefur þennan eiginleika en **þjappað** ef það er hálfþjappað í þessum skilningi og Hausdorf-rúm.

Skilgreining 33 *Hlutmengi A í grannrúmi X er sagt vera* **þjappað** *ef það er þjappað sem hlutrúm í grannmynztrinu sem það erfir frá X.*

Setning 3.1 *Hlutmengi A í grannrúmi X er þjappað þá og því aðeins að fyrir sérhverja fjölskyldu $(U_i)_{i\in I}$ af opnum mengjum í X sem þekur A, þ.a. $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ er til endanlegt hlutmengi J í I þ.a. $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.*

Sönnun
($\Rightarrow$) Augljóst: Athugum að $(V_i)_{i\in I}$, þar sem $V_i = A\cap U_i$ er opin þakning grannrúmsins A.

($\Leftarrow$) Látum $(V_i)_{i\in I}$ vera opna þakningu á A með opnum mengjum í A; veljum U_i opið í X þ.a. $V_i = A \cap U_i$. Þá er $A = \bigcup_{i\in I} U_i$, o.s.frv.

Setning 3.2 *Lokað hlutmengi í þjöppuðu rúmi er þjappað.*

Sönnun
Látum A vera lokað í þjöppuðu rúmi X og $(U_i)_{i\in I}$ vera opna þakningu menginsins A með opnum mengjum í X, þ.e. $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Veljum $i_0 \notin I$ og setjum $U_{i_0} = X \setminus A$. Þá er $\bigcup_{i\in I\cup\{i_0\}} U_i$ opin þakning rúmsins X og hefur endanlega hlutþakningu $(U_i)_{i\in J}$. Þá er $A \subset \bigcup_{i\in J\setminus\{i_0\}} U_i$.

Setning 3.3 *Þjappað hlutrúm í Hausdorf-rúmi er lokað.*

Sönnun
Látum A vera þjappað hlutrúm í Hausdorf-rúmi X og $x \in X\setminus A$. Fyrir sérhvert stak y í A eru til opnar grenndir U_y um x og V_y um y þ.a. $U_y \cap V_y = \varnothing$. Þá er $(V_y)_{y\in A}$ opin þakning mengisins A í X og hefur endanlega hlutþakningu $(V_y)_{y\in J}$ þannig að $A \subset \bigcup_{y\in J} V_y$. En þá er $U := \bigcap_{y\in J}$ grennd um x og $U \cap A = A \setminus \bigcup_{y\in J}(X \setminus U_y) \supset A \setminus \bigcup_{y\in J} V_y = \varnothing$, svo að $U \subset X \setminus A$ og $X \setminus A$ því opið.

Setning 3.4 *Látum $f : X \to Y$ vera samfellda vörpun milli grannrúma og A vera þjappað hlutmengi í X. Þá er $f[A]$ þjappað í Y.*

Sönnun
Látum $(V_i)_{i\in I}$ vera opna þakningu á $f[A]$ í Y, þá er $(f^{-1}[V_i])_{i\in I}$ opin þakning á A í X, hefur endanlega hlutþakningu, $(f^{-1}[V_i])_{i\in J}$. Þá er $(V_i)_{i\in J}$ þakning á $f[A]$ í Y.

Setning 3.5 *Látum $f : X \to Y$ vera samfellda og gagntæka vörpun frá þjöppuðu rúmi X í Hausdorf-rúm Y. Þá er f grannmótun, þ.e. andhverfan f^{-1} er samfelld.*

Sönnun
Þurfum að sýna: Ef A er lokað í X, þá er $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ lokað í Y. En A er lokað í þjöppuðu rúmi, því þjappað, svo að myndmengið $f[A]$ er þjappað hlutmengi í Hausdorf-rúmi og því lokað.

Fylgisetning 3.1 *Látum $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ vera grannmynztur á mengi X þ.a. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_\in$, $(X, \mathcal{T}_1)$ sé Hausdorf-rúm og $(X, \mathcal{T}_2)$ sé þjappað, þá er $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Sönnun
$\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_2)$ er samfelld og grannmótun samkvæmt setningu að ofan, svo að þá eru grannmynztrin jafnfín.

Tölum nú aðeins um firðrúm eins og gert er í bókinni. Látum X vera firðrúm með firð d. Við segjum að X sé ***forþjappað*** ef fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ er til endanlegt hlutmengi A í X þ.a. $d(x, A) < \epsilon$ fyrir öll x úr X. (Jafngilt er að fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ megi þekja X með endanlega mörgum opnum kúlum með geisla ϵ). Höfum þá eftirfarandi setningu.

Setning 3.6 *Látum X vera firðrúm. Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:*

1. *X er þjappað.*
2. *X er forþjappað og fullkomið.*
3. *Sérhver runa X hefur samleitna hlutrunu.*

Sönnun
Þetta er setning 5.1.17. í firðrúmahefti Reynis.

Athugasemd
Forþjappað firðrúm er takmarkað: Látum A vera endanlegt hlutmengi í firðrúmi X þ.a. $d(x, A) < 1$ fyrir öll x úr X, þá er

$$\delta(X) \leq 2 + \max_{a,b \in A} d(a, b) < +\infty.$$

En takmarkað firðrúm þarf ekki að vera forþjappað: Óendanlegt mengi X með sundurlausu firðinni.

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{ef} \quad x \neq y \\ 0 & \text{ef} \quad x = y \end{cases}$$

er takmarkað en ekki forþjappað nema það sé endanlegt.

Sýnidæmi 3.2.1 Æfingardæmi: Ef A er hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ þ.a. venjulega firðin á $\mathbb{R}^n$ gefi af sér sundurlausu firðini á A, þá hefur A í hæsta lagi $n + 1$ stak.

Hins vegar gildir:

Hjálparsetning 3.1 *Hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ er forþjappað þá og því aðeins að það sé takmarkað.*

Sönnun
Sjá (5.1.16.) í heftinu Firðrúm.

Fylgisetning 3.2 *(Heine-Borel) Hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ er þjappað grannrúm þá og því aðeins að það sé lokað og takmarkað.*

Athugasemd
Skilyrði 1 og 3 í setningunni að ofan eru ekki jafngild fyrir grannrúm.

Sýnidæmi 3.2.2 Látum (x_n) vera runu í löngu línunni $\mathcal{L}$. Þá er (x_n) takmörkuð: Til er stak a í $\mathcal{L}$ þ.a. $x_n \leq a$ fyrir öll n úr $\mathbb{N}$. Annars væri fyrir mengið A_Ω af öllum raðtölum $< \Omega$: $A_\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\alpha \in A_\Omega : \alpha \leq x_n\}$. Þ.e. A_Ω væri teljanlegt sammengi af teljanlegum mengjum; en það er óteljanlegt, svo að það gengur ekki. En þá er

$$x_n \in [0, a]$$

og $[0, a]$ er grannmóta $[0, 1]$, svo að (x_n) hefur samleitna hlutrunu skv.Heine-Borel setningu og fyrri setn. Þetta sýnir að langalínan er ekki firðanleg. Langalínan er ekki þjöppuð: $([0, a[)_{a\in\mathcal{L}}$ er opin þakning sem hefur ekki endanlega hlutþakningu.

Athugasemd
Þurfum seinna á eftirfarandi að halda:

Setning 3.7 *Sérhver opin þakning á þjöppuðu firðrúmi hefur* **Lebesgue-tölu***.*

Lebesgue-tala fyrir opna þakningu $(U_i)_{i\in I}$ á firðrúmi X er tala $\epsilon > 0$ þ.a. fyrir sérhvert hlutmengi A í X þ.a. $\delta(A) < \epsilon$ er til i úr I þ.a. $A \subset U_i$. Þurftum að nota þetta í tvinnfallagreiningu til að sýna að ef við höfum feril í $\mathbb{C}^*$, þá hefur hann samfelldan logra. Þetta er eitt mikilvægasta argumentið í þekjufræðum.

3.2.1 Staðþjöppuð grannrúm

Skilgreining 34 *Grannrúm X kallast* **staðþjappað** *ef sérhver punktur í X hefur þjappaða grennd, þ.e.a.s. þjappað mengi sem inniheldur opið mengi sem inniheldur punktinn.*

Sýnidæmi 3.2.3 Rúmin $\mathbb{R}^n$ eru staðþjöppuð en ekki þjöppuð; sömuleiðis öll lokuð hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ (almennar staðlokuð) eru staðþjöppuð. [Hlutmengi A í grannrúmi X er kallað staðlokað ef það er lokað hlutmengi í opnu hlutmengi úr X; jafngilt er að sérhver punktur x úr A hafi opna grennd U þannig að $A \cap U$ sé lokað í U.] Mörg af mikilvægustu dæmunum um grannrúm eru staðþjöppuð rúm.

Skilgreining 35 *Látum X vera Hausdorff-rúm.* **Þjöppun** *rúmsins X er þjappað Hausdorff-rúm Y þ.a. X sé þétt hlutrúm í Y.*

Setning 3.8 *Látum X vera staðþjappað Hausdorff-rúm og ∞_X vera stak sem er ekki stak í X. Setjum*

$$\hat{X} := X \cup \{\infty_X\}$$

og skilgreinum grannmynztur á $\hat{X}$ þ.a. hlutmengi U í $\hat{X}$ kallast **opið** *ef eftirfarandi tveimur skilyrðum er fullnægt:*

1. *$U \cap X$ er opið í X;*
2. *Ef $\infty_X \in U$, þá er til þjappað hlutmengi K í X þ.a. $X \setminus K \subset U$.*

Þá er $\hat{X}$ þjöppun rúmsins X, nema X sé sjálft þjappað.

Sönnun
Ljóst að þetta skilgreinir grannmynztur á $\hat{X}$ og að X er þétt í $\hat{X}$ er líka ljóst.

Skilgreining 36 *Köllum* $\hat{X}$ **eins-punkts-þjöppun** *eða* **Aleksandrov-þjöppun** *rúmsins* X*.*

Sýnidæmi 3.2.4 Aleksandrov-þjöppun $\mathbb{R}^n$ er grannmóta $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$. Sést með kúluofanvarpi.

Setning 3.9 *Ef* Y *er þjappað Hausdorff-rúm,* $p \in Y$*,* $X := Y \setminus \{p\}$*, þá er* X *staðþjappað og* Y *grannmóta* $\hat{X}$*.*

Skilgreining 37 *Látum* x *vera punkt í grannrúmi* X*.* **Grenndagrunnur** $\mathcal{G}$ *fyrir* x *í* X *er mengi af grenndum um* x *þannig að sérhver grennd um* x *innihaldi stak úr* $\mathcal{G}$ *sem hlutmengi.*

Sýnidæmi 3.2.5 Í firðrúmi er mengið af öllum kúlum $B(x, \frac{1}{n+1})$, þar sem $n \in \mathbb{N}$, grenndargrunnur fyrir x.

Setning 3.10 *Ef* X *er staðþjappað Hausdorff-rúm, þá mynda þjöppuðu grenndirnar um* x *grenndagrunn; m.ö.o. sérhver grennd um* x *inniheldur þjappaða grennd um* x*.*

Sönnun
(Reynir ætlar að prófa að gera þetta öðrivísi en í Munkres) Látum U vera grennd um x og K vera þjappað grennd um x. Þá er $\mathring{K} \cap U$ opið hlutmengi í K og $L := K \setminus U$ er lokað í K og því þjappað. Finnum fyrir $y \in L$ opnar sundurlægar grenndir V_y um y og U_y um x og þekjum L með endanlega mörgum $V_{y_1}, ..., V_{y_n}$. Þá inniheldur $K \setminus (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n})$ $W := \mathring{K} \cap U \cap U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$, er lokað og innihaldið í U. Þar með er $\overline{W} \subset U$, og $\overline{W}$ þjöppuð grennd um x í U.

3.2.2 Setning Tíkhonov

Næsta setning er sú fyrsta sem hefur ekki trivial-sönnun:

Setning 3.11 *(Tíkhonov) Margfeldi af þjöppuðum grannrúmum er þjappað.*

Sönnun krefst undirbúnings. Hún notar síur, sem við munum skilgreina, og hjálparsetningu Zorns, sem segir að sérhvert raðað mengi, þannig að sérhvert línulega raðað hlutmengi hafi yfirstak hafi hástak.

Skilgreining 38 **Sía** *á mengi X er mengi $\mathcal{F}$ af hlutmengjum í X þ.a. $\mathcal{F} \neq \varnothing$ og þ.a. eftirfarandi þremur skilyrum sé fullnægt:*

1. *Ef $A, B \in \mathcal{F}$, þá er $A \cap B \in \mathcal{F}$.*
2. *Ef $A \in \mathcal{F}$ og $A \subset B \subset X$, þá er $B \subset \mathcal{F}$.*
3. *$\varnothing \notin \mathcal{F}$.*

Sýnidæmi 3.2.6 1. Mengið $\mathcal{V}(a)$ af öllum grenndum um punkt a í grannrúmi X er sía á X; köllum hana ***grenndasíu*** punktsins a í X.

2. Látum X vera óendanlegt mengi og $\mathcal{F}$ vera mengi allra lhutmengja í X sem hafa endanlegt fyllimengi, þá er $\mathcal{F}$ sía á X.

Skilgreining 39 **Grunnur** *fyrir síu $\mathcal{F}$ er mengi $\mathcal{G}$ af hlutmengjum í X þannig að $\mathcal{F}$ sé nákvæmlega mengi þeirra hlutmengja í X sem innihalda stak úr $\mathcal{G}$ sem hlutmengi.*

Skilgreining 40 *Látum $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ vera síur á X. Við segjum að $\mathcal{F}_1$ sé* **grófari** *en $\mathcal{F}_2$ og að $\mathcal{F}_2$ sé* **fínni** *en $\mathcal{F}_1$ ef $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.*

Skilgreining 41 *Látum $\mathcal{F}$ vera síu á grannrúmi X. Við segjum að $\mathcal{F}$* **stefni á** *punkt a úr X ef $\mathcal{F}$ er fínni en grenndasían $\mathcal{V}(a)$; þ.e. sérhver grennd um a er stak í $\mathcal{F}$. Segjum líka að $\mathcal{F}$ sé samleitin með markgildi a.*

Setning 3.12 *Fyrir grannrúm X er jafngilt:*

1. *X er Hausdorff.*
2. *Markgildi síu ef til er, ákvarðast ótvírætt.*

Sönnun
Gerum ráð fyrir að X sé Hausdorff-rúm, $\mathcal{F}$ sé sía sem hefur tvö markgildi a, b þ.a. $a \neq b$. Finnum grenndir U um a og V um b þ.a. $U \cap V = \varnothing$. En þá er $U, V \in \mathcal{F}$ og því $\varnothing = U \cap V \in \mathcal{F}$, en tóma mengið er aldrei í síunni, mótsögn.

Öfugt ef X er ekki Hausdorff, látum a, b vera ólíka punkta í X þ.a. fyrir allar grenndir U um a og V um b sé $U \cap V \neq \varnothing$. Látum $\mathcal{F}$ vera mengi allra hlutmengja í X sem innihalda mengi af gerðinni $U \cap V$, þar sem U er grennd um a og V grennd um b. Þá er $\mathcal{F}$ sía sem stefnir bæði á a og b.

Skilgreining 42 ***Ofursía*** *á mengi X er óstækkanleg sía á X þ.e. sía sem hefur enga stranglega fínni síu.*

Setning 3.13 *Sérhver sía er innihaldin í ofursíu.*

Sönnun
Látum $\mathcal{F}$ vera síu og M vera mengi af öllum stærri síum $\mathcal{F}'$ þ.a. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, raðað með hlutmengjavenslunum. Ef A er línuega raðað hlutmengi í M þá hefur A yfirstak: Ef $A = \varnothing$, þá er $\mathcal{F}$ yfirstak; en ef $A \neq \varnothing$ þá er

$$\mathcal{F}'' := \bigcup\{\mathcal{F}' : \mathcal{F}' \in A\}$$

sía: Ef $C, D \in \mathcal{F}''$ þá eru til $\mathcal{F}_1'$ og $\mathcal{F}_2'$ í A þ.a. $C \in \mathcal{F}_1'$, $D \in \mathcal{F}_2'$. Nú er A línulega raðað, svo að annað megjanna $\mathcal{F}_1', \mathcal{F}_2'$ er hlutmengi í hinu; segjum $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2'$. Þá er $C, D \in \mathcal{F}_2'$ og þá $C \cap D \in \mathcal{F}_2'$ og því $C \cap D \in \mathcal{F}''$. Annað er ljóst. Þar með er $\mathcal{F}''$ yfirstak fyrir A, og hjálparsetning Zorns segir að M hafi hástak; en það er þá ofursía sem inniheldur $\mathcal{F}$.

Setning 3.14 *Sía $\mathcal{F}$ á mengi X er ofursía þa og því aðeins að fyrir sérhvert hlutmengi A í X sé annaðhvort $A \in \mathcal{F}$ eða $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Athugasemd
Ef A er hlutmengi í X og $\mathcal{F}$ er sía á X, þá geta mengin A og $X \setminus A$ ekki bæði verið í $\mathcal{F}$ því að þá væri

$$\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F},$$

sem stenst ekki.

Sönnun
Gerum ráð fyrir að $\mathcal{F}$ é ofursía og A sé hlutmengi í X þannig að $A \notin \mathcal{F}$. Setjum

$$\mathcal{F}' := \{B \subset X : A \cup B \in \mathcal{F}\}.$$

Þá er $\mathcal{F}'$ sía á X og $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Nú er $A \cup (X \setminus A) = X \in \mathcal{F}$, svo að $X \setminus A \in \mathcal{F}'$. Ef $X \setminus A \notin \mathcal{F}$ þá væri $\mathcal{F}$ eiginlegt hlutmengi í $\mathcal{F}'$ sem er í mótsögn við að $\mathcal{F}$ er ofursía. Gerum nú á hinn boginn ráð fyrir að $\mathcal{F}$ sé sía sem fullnægir skilyrðinu í setnigunni. Látum $\mathcal{F}'$ vera síu þannig að $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Látum $A \in \mathcal{F}'$. Skv athugasemd er $X \setminus A \notin \mathcal{F}$, svo að skv forsendu er $A \in F$. Þar með er $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ og $\mathcal{F}$ er ofursía.

Setning 3.15 *Grannrúm X er þjappað þá og því aðeins að sérhver ofursía á X sé samleitin.*

Við sönnum aðein meira, nefnilega tvær hjálparsetningar:

Hjálparsetning 3.2 *Ef sérhver ofursía á X er samleitin, þá er X þjappað.*

Hjálparsetning 3.3 *Ef $\mathcal{S}$ er forgrunnur fyrir grannmynstrið á X þ.a. sérhver þakning með mengjum í $\mathcal{S}$ hafi endanlega hlutþakningu, þá er sérhver ofursía á X samleitin.*

Bein afleiðing af HS1 og HS2 er:

Setning 3.16 *(Alexander) Látum $\mathcal{S}$ vera forgrunn fyrir grannmynztrið á grannrúmi X þannig að sérhver þakning rúmsins X með stökum úr $\mathcal{S}$ hafi endanlega hlutþakningu, þá er rúmið X þjappað.*

[Reynir tekur fram að þetta er í raun niðurstaðan sem við þurfum til að sanna Tikonov setninguna]

Sönnun
(Fyrri hjálparsetning) Látum $(U_i)_{i\in I}$ vera opna þakningu rúmsins og gerum ráð fyrir að hún hafi enga endanlega hlutþakningu. Þá mynda mengin

$$X \setminus (U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}),$$

þar sem $n \in \mathbb{N}$ og $i_1, ..., i_n \in I$, grunn fyrir síu $\mathcal{F}$ á X, því að þau eru ekki tóm og sniðmengi tveggja er af sömu gerð. Þá er $\mathcal{F}$ innihaldin í ofursíu $\mathcal{F}'$, sem er samleitin skv forsendu. Látum a vera markgildi hennar. Finnum stak i úr I þannig að $a \in U_i$; þá er $U_i \in \mathcal{F}'$. En þá er $X \setminus U_i \notin F'$ í mótsögn við að $X \setminus U_i \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Sönnun
(Seinni hjálparsetning) Látum $\mathcal{S}$ vera forgrunn á X sem fullnægir skilyrðinu á HS2 og látum $\mathcal{F}$ vera ofursíu á X sem er ekki samleitin. Fyrir sérhvert x úr X er til mengi U_x þannig að $x \in U_x$ og $U_x \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$; annars væri til stak x þannig að öll stök úr $\mathcal{S}$ sem innihalda x sem stak væru í $\mathcal{F}$; þar með öll sniðmengi þeirra, og er þar með grenndagrunnur fyrir X, og þá væri x markgildi síunnar $\mathcal{F}$.
Þar með er $(U_x)_{x\in X}$ þakning á X með stökum í $\mathcal{S}$ og hefur þar með endanlega hlutþakningu, svo að til eru stök $x_1, ..., x_n$ í X þannig að $X = U_{x_1} \cup \cdot \cup U_{x_n}$. En þar sem $\mathcal{F}$ er ofursía og $U_{x_i} \notin \mathcal{F}$ er $X \setminus U_{x_i} \in \mathcal{F}$ svo að

$$\varnothing = X \setminus (U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}) = (X \setminus U_{x_1}) \cap \cdots \cap (X \setminus U_{x_n}) \in \mathcal{F}$$

sem stezt ekki!

Setning 3.17 *(Tíkhonov) Ef $(X_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af þjöppuðum rúmum þá er $\prod_{i\in I} X_i$ þjappað.*

Sönnun
Látum $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ vera náttúrulegu ofanvörpin og $\mathcal{S}$ vera mengi allra hlutmengja í $\prod_{i\in I} X_i$ af gerðinni $\pi_i^{-1}[U_i]$, þar sem $i \in I$ og U_i er opið í X_i. Þá er $\mathcal{S}$ forgrunnur fyrir margfeldisgrannmynztrið. Það nægir að sýna að opin þakning á $\prod_{i\in I} X_i$ með mengjum í $\mathcal{S}$ hafi endanlega hlutþakningu.
Annars væri til hlutmengi $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}$ sem er þakning á X en hefur ekki endanlega hlutþakningu. Fyrir sérhvert i úr I látim við $\mathcal{W}_i$ vera mengi allra opinna hlutmengja V í X_i þannig að $\pi_i^{-1}[V] \in \mathcal{W}$. Þá getur $\mathcal{W}_i$ ekki verið þakning á X_i, annars hefði hún endanlega hlutþakningu $\{V_1, ..., V_m\}$, og þá væri $\{\pi_i^{-1}[V_1], ..., \pi_i^{-1}[V_m]\}$ þakning á $\prod_{i\in I} X_i$ með mengjum ú $\mathcal{W}$. Því er til $x_i \in X_i$ sem er ekki í neinu mengjanna úr $\mathcal{W}_i$. En þá er $x = (x_i)_{i\in I}$ ekki í neinu mengjanna úr $\mathcal{W}_i$; mótsögn.

Fylgisetning 3.3 *Ef $(X_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af Hausdorff-rúmum, þá er $\prod_{i\in I} X_i$ líka Hausdorff-rúm.*

Setning 3.18 *Ef $(X_i)_{i\in I}$ er fjölskylda fa þjöppuðum Hausdorff-rúmum, þá er $\prod_{i\in I} X_i$ líka þjappað Hausdorff-rúm.*

Athugasemd
(**Athugasemdir við dæmi 21 í dæmatíma**) Skoðum fyrst hjálparsetningu, sem flestir gáfu sér við lausn á fyrsta dæminu.

Hjálparsetning 3.4 *Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu af runum $a_n = (a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ þ.a. fyrir sérhvert n sé a_{n+1} hlutruna í a_n þá er hornalínurunan $(a_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ hlutruna í a_0, almennar er $(a_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ hlutruna í a_n fyrir öll n.*

Sönnun
Það að a_{n+1} sé hlutruna í a_n þýðir að til er stranglega vaxandi vörpun $\varphi_{n+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ þ.a.$a_{n+1,\varphi_{n+1}(k)}$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Við fáum þá að

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= a_{0,\varphi_1(1)}\\
a_{2,2} &= a_{1,\varphi_2(1)} = a_{0,\varphi_1(\varphi_2(2))}\\
a_{3,3} &= a_{2,\varphi_3(3)} = a_{1,\varphi_2(\varphi_3(3))} = a_{0,\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(3)))}\\
&\vdots\\
a_{k,k} &= a_{k-1,\varphi_k(k)} \cdots = a_{0,\varphi_1(\varphi_2(\cdots\varphi_k(k)))}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sýna þarf að ef φ_1, φ_2 er runa af stranglega vaxandi vörpunum, þá er $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ þar sem $\psi(k) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k(k)$ stranglega vaxandi. Sýna þarf að $\psi(k+1) > \psi(k)$.

Nú er $\varphi_{k+1}(k+1) \geq k+1$, af því að φ_{k+1} er stranglega vaxandi

$$\begin{aligned}\psi(k+1) &= \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1}(k+1) \\ &\geq \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k(k+1) \\ &> \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k(k) \\ &= \psi(k)\end{aligned}$$

Erum líka að nota að samskeyting af stranglega vaxandi vörpunum er stranglega vaxandi, þ.e.a.s. $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k$ er stranglega vaxandi. Almennar er

$$a_{kk} = a_{n,\varphi_{n+1}\circ\varphi_{n+1}\circ\cdots\circ\varphi_k}$$

ef $k \geq n$ og $\psi_n(k) := \varphi_{n+1} \circ \cdots \varphi_k(k)$ er stranglega vaxandi.

Skoðum nú aðra hjálparsetningu

Hjálparsetning 3.5 *Ef $(X_k)_{k\in I}$ er fjölskylda af grannrúmum. Þá er runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ runa í $X = \prod_{k\in I} X_k$, $a_n = (a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$. Þá er runan samleitin með markgildi $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ þá og því aðeins að $\lim_{n\to+\infty} a_{nk} = b_k$ fyrir öll $k \in I$.*

Sönnun
Gerum ráð fyrir að $\lim_{n\to+\infty} a_{nk} = b_k$ fyrir öll $i \in I$ Látum V vera opna grennd um b, þá er til endanlegt mengi $J \subseteq I$ þ.a. $U = \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I\setminus J} X_i$ þ.a. U_j er opið í X_j fyrir öll $j \in J$ og þ.a. $b \in U \subseteq V$. Þá er $a_j \in U_j$ fyrir öll $j \in J$. Nú er b_k markgildi rununnar $(a_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ svo til er M_j þ.a. $a_{nk} \in U_j$ fyrir öll $n \geq M_j$. Látum $M = \max_{j\in J} M_j$. Þá er $a_{nk} \in U_j$ fyrir öll $n \geq M$ og öll $j \in J$. Svo þá er $a_n \in U \subseteq V$ fyrir öll $n \geq M$. Svo $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$. Hin áttin er trivial, tíminn líður.

Smá athugasemd frá Reynir: Ef $f : X \to Y$ er samfelld, $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$ í X, þá er $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(b)$ í Y. Til að fá hina áttina að ofan þurfum við bara að nota þessa setningu á öll ofanvörp.

Kafli 4

Teljanleikaskilyrði

Skilgreining 43 1. *Grannrúm uppfyllir fyrsta teljaneikaskilyrði ef sérhver punktur hefur teljanlegan grenndagrunn.*

2. *Grannrúm fullnægir öðru teljanleikaskilyrði ef grannmynztrið hefur teljanegan grunn.*

3. *Grannrúm kallast Lindehöf-rúm ef sérhver opin þakning þess hefur teljanlega hlutþakningu.*

4. *Grannrúm er þéttteljanlegt ef það hefur teljanlegt þétt mengi.*

Setning 4.1 *Eiginleikar (1), (3) og (4) eru afleiðin af (2). Það er að segja (2) er sterkasti eiginleikinn.*

Sönnun
Sönnun er nokkurn veginn augljós. Til dæmis er (1) augljós afleiðing af (2).

Setning 4.2 *Ef X fullnægir fyrsta teljanleikaskilyrði þá gildir:*

1. *Fyrir $x \in A$ þá gildir að $x \in \overline{A}$ þá og því aðeins að til sé runa (a_n) í A sem stefnir á x.*

2. *Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld í punkti x þá og því aðeins að $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = x$ fyrir allar runur (x_n) í X þannig að $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.*

Sönnun
Augljóst, sjá Munkres.

4.1 Aðskiljanleikaskilyrði

Höfum kynnt þremur aðskiljanleikaskilyrðum, T_0, T_1, og T_2.

Skilgreining 44 *1. Grannrúm X kallast reglulegt (eða T_3-rúm) ef það er T_1 og fyrir séhvern punkt x og sérhvert lokað mengi B þannig að $x \notin B$ eru til sundurlæg opin mengi U og V í X þannig að $x \in U$ og $B \subset V$.*

2. Grannrúm X kallast normlegt (eða T_4-rúm) ef það er T_1 og fyrir öll sundurlæg lokuð mengi A, B í X eru til sundurlæg opin mengi U, V í X þannig að $A \subset U$ og $B \subset V$.

Setning 4.3 *Við höfum eftirfarandi*

1. *Sérhvert þjappað rúm er normlegt.*
2. *Sérhvert firðanlegt rúm er normlegt.*

Sönnun

1. Látum A, B vera lokuð og sundurlæg. Finnum fyrir $x \in A$, $y \in B$ opin sundurlæg mengi $U_{x,y}$ um x og $V_{x,y}$ um y. Þekjum A með endalega mörgum af mengjunum U_x, segjum ef $U_{x_1,y}, ..., U_{x_n,y}$ og setjum $V_y := \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k,y}$. Þá sker V_y ekki $U_y := U_{x_1,y} \cup \cdots U_{x_n,y}$. Þekjum B með endalega mörgum $V_{y_1}, ..., V_{y_m}$ og setjum $U := \bigcap_{j=1}^{m} U_{y_j}$ og $V := \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j}$.
2. Setjum $U := \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ og $V := \{y \in B : d(x, A) > d(x, B)\}$.

Setning 4.4 *Reglulegt rúm með teljanlegan grunn er normlegt.*

Sönnun
Sjá Munkres.

Þá má orða skilyrðin í skilgreiningunni þannig:

Setning 4.5 *1. Rúm er reglulegt þá og því aðeins að það sé T_1 og fyrir sérhver punkt x í X og opna grennd U um x er til opið mengi V þannig að*

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

2. Rúm er normlegt þá og því aðeins að það sé T_1 og fyrir A lokað, U opið er til opið V þannig að

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Sönnun
Augljóst.

Fylgisetning 4.1 *Ef A, B eru hlutmengi í normlegu rúmi, þannig að $\overline{A} \subset B$, þá er til C þannig að $\overline{A} \subset \overset{\circ}{C} \subset \overline{C} \subset \overset{\circ}{B}$.*

Næsta setning er önnur setningin í þessu námkeiði sem er non-trivial að sanna.

Setning 4.6 *(**Úryson**) Látum A, B vera sundurlæg lokuð hlutmengi í normlegu rúmi. Þá er til samfellt raunfall f á X þannig að $0 \leq f \leq 1$, $f|A = 0$ og $f|B = 1$.*

Sönnun
Segjum að endanleg runa $\mathcal{A} = (A_0, A_1, ..., A_r)$ sé *leyfileg* ef $A \subset A_0$, $B \subset X \setminus A_r$ og $\overline{A_{k-1}} \subset \overset{\circ}{A_k}$ fyrir $k = 1, ..., r$. Fyrir slíka runu skilgreinum við *þrepafall* $g : X \to \mathbb{R}$ með

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } x \in A_0, \\ k/r & \text{ef } x \in A_k \setminus A_{k-1}, \ k = 1, ..., r, \\ 1 & \text{ef } x \in X \setminus A_r. \end{cases}$$

og endanlega *mismunarunu* $S_0, ..., S_r$ með

$$S_0 := \overset{\circ}{A}_1, S_k := \overset{\circ}{A}_{k+1} \setminus \overline{A_{k-1}} \text{ fyrir } k = 1, ..., r-1, \ S_r := X \setminus \overline{A_{r-1}}.$$

Þá er $S_0, ..., S_r$ opin þakning rúmsins X. Fyrir leyfilega runu $(A_0, ..., A_r)$ má búa til *tvöföldun*, sem er leyfileg runa $(A'_0, ..., A'_{2r})$ þannig að $A'_{2k} = A_k$ og $\overline{A_{k-1}} = \overline{A'_{2k-2}} \subset \overline{A'_{2k-1}} \subset \overset{\circ}{A'}_{2k} = \overset{\circ}{A}_k$. Byrjum nú með leyfilegu rununa $\mathcal{A}^\circ = (A, X \setminus B)$, látum $\mathcal{A}^1$ vera tvöföldun hennar; almennar er $\mathcal{A}^{n+1}$ tvöfuldun rununar $\mathcal{A}^n$; látum g_n vera þrepafallið fyrir $\mathcal{A}^n$ og $S_0^n, ..., S_{2^n}^n$, mismunarununa fyrir $\mathcal{A}^n$. Mengið $A_k^n \setminus A_{k-1}^n$ skiptist í næsta skrefi í

$$A_{2k}^{n+1} \setminus A_{2k-1}^{n+1} \text{ og } A_{2k-1}^{n+1} \setminus A_{2k-2}^{n+1}; \ g_n(x) := \frac{k}{2^n} \text{ á } A_k^n \setminus A_{k-1}^n,$$

lækkar í $\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ á öðrum hlutanum, er óbreytt $\dfrac{2k}{2^{n+1}}$ á hinum, svo að

$$0 \leq g_n(x) - g_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Sér í lagi er runa $g_n(x)$ lækkandi runa af tölum ≥ 0, svo að við getum skilgreint $f : X - to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &:= \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = g_0(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} (g_{n+1}(x) - g_n(x)) \\ &= g_n(x) + \sum_{k=n}^{+\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)). \end{aligned}$$

Við höfum $f|A = 0$ og $f|B = 1$ og

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Fyrir $x, y \in S_k^n$ er $|g_n(x) - g_n(y)| \leq \dfrac{1}{2^n}$ svo að

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(y)| + |g_n(y) - f(y)| \leq \frac{3}{2^n}.$$

Látum nú $x \in X$ og ε vera gefið. Veljum n þannig að $\dfrac{3}{2^n} < \varepsilon$. Til er k þannig að $x \in S_k^n$, og þá er S_k^n opin grennd um x sem fallið f varpar í $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Þar með er f samfellt. Ljóslega er $0 \leq f \leq 1$.

Hjálparsetning 4.1 *Látum X vera reglulegt grannrúm með teljanlegan grunn. Þá er til teljanleg fjölskylda $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af föllum $f_n : X \to [0, 1]$ þ.a. fyrir alla punkta x úr X og lokuð mengi A þ.a. $x \notin A$ er til n úr $\mathbb{N}$ þ.a. $f_n(x) = 1$ og $f_n|A = 0$.*

Sönnun
Vitum að X er normlegt, (skv. setningu í Munkres). Látum $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ vera grunn og athugum allar tvenndir n, m þ.a. $\overline{B_n} \subset B_m$; fyrir slíka tvennd er til fall $g_{nm} : X \to [0, 1]$ þ.a. $g_{nm}|\overline{B_n} = 1$ og $g_{nm}|X \setminus B_m = 0$. Látum $x \in X$, A vera lokað í X þ.a. $x \notin A$. Veljum B_m þ.a. $x \in B_m \subset X \setminus A$ og síðan n þ.a. $\overline{B_n} \subset B_m$(Vegna þess að rúmið er normlegt). Þá er $A \subset X \setminus B_m$, $g_{nm}(x) = 1$ og $g_{nm}|A = 0$; svo að fjölskylda þessara falla g_{nm} sem er teljanleg dugar.

Skilgreining 45 *Vörpun $f : X \to Y$ milli grannrúma kallast* **greyping** *ef hún gefur af sér grannmótun frá X á myndmengið $f[X]$, sem við lítum á sem hlutrúm í Y.*

Setning 4.7 *Látum $(f_j)_{j \in J}$ vera fjölskyldu af samfelldum vörpunum $f_j : X \to Y_j$ og $f : X \to \prod_{j \in J} Y_j$ vera vörpunina sem hún gefur af sér. Gerum ráð fyrir eftirfarandi skilyrðum.*

1. *Fyrir ólíka punkta a, b úr X er til j úr J þannig að $f_j(a) \neq f_j(b)$.*
2. *Fyrir sérhvern punkt x úr X og sérhvert lokað hlutmengi A í X þannig að $x \notin A$ er til stak j úr J þannig að $f_j(x) \notin \overline{f_j[A]}$.*

Þá er f er greyping.

Sönnun
Heimadæmi á blaði 7.

sem afleiðingu fáum við:

Setning 4.8 *Ef X er reglulegt með teljanlegan grunn, þá er X grannmóta hlutrúmi $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

Sönnun
Tökum fjölskylduna úr hjálparsetningu; hún gefur greypingu í $[0,1]^{\mathbb{N}}$ skv. greypingarsetningu.

Skv.setningu úr fyrirlestri er $[0,1]^{\mathbb{N}}$ firðanlegt: Firð sem skilgreinir grannmynztrið er

$$d(x,y)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|},\qquad x=(x_n),\ y=(y_n)$$

Fáum

Setning 4.9 (Úryson) *Reglulegt rúm með teljanlegan grunn er firðanlegt.*

Alemnnari setningu má finna í Munkres. Reynir ætlar frekar að fara að einbeita sér að undirstöðugrúpunni.

Skilgreining 46 *Grannrúm kallast* **fullkomlega reglulegt** *eða* $T_{3\frac{1}{2}}$**-rúm** *ef það er* T_1 *og fyrir sérhvern punkt* x *í* X *og sérhvert lokað mengi* A *í* X *þ.a.* $x\notin A$ *er til samfellt fall* $f:X\to[0,1]$ *þannig að* $f(x)=1$ *og* $f|A=0$.

Athugasemd
Fullkomlega reglulegt rúm er reglulegt, og normlegt rúm er fullkomlega reglulegt.

Látum X vera fullkomlega reglulegt og f vera takmarkað fall á X. Fyrir slíkt f setjum við

$$I_f=[\inf_{x\in X}f(x),\ \sup_{x\in X}f(x)]$$

og höfum þá fjölskyldu $(f)_{f\in\mathcal{C}_b(X)}$, $\mathcal{C}_b(X)$ =rúm takmarkaðara samfelldra falla á X. Sem fullnægir skilyrðunum í greypingarsetningunni; svo að fjölskyldan gefur af sér greypingu

$$\Phi:X\to\prod_{f\in\mathcal{C}_b(X)}I_f,$$

og $\prod_{f\in\mathcal{C}_b(X)}I_f$ er grannmóta $[0,1]^J$, $J=\mathcal{C}_b(X)$. Köllum svona margfeldi $[0,1]^J$, þar sem J er hvaða mengi sem vera skal, ***tening***.

Setning 4.10 *(Tíkhonov) Grannrúm er fullkomlega reglulegt þá og því aðeins að það sé grannmóta hlutrúmi í teningi.*

Sönnun
$\Rightarrow$ er komið, afleiðing af greypingarsetningunni.

$\Leftarrow$ Teningur er þjappað rúm, skv. stóru Tíkhonov setningunni, þar með normlegt, þar með fullkomlega reglulegt, og hlutrúm í fullkomlega reglulegu rúmi er fullkomlega reglulegt: Ef X er fullkomlega reglulegt, $Y\subset X$, $x\in Y$ og A er lokað í Y þannig að $x\notin A$, þá er til B lokað í X þannig að $A=Y\cap B$ og $f:X\to[0,1]$ þ.a. $f(x)=1$ og $f|B=0$. Fyrir $g:=f|Y$ er $g(x)=1$, $g|A=0$.

Sjáum að hlutrúm í normlegu rúmi þarf ekki endilega að vera normlegt, en það er að minnsta kosti fullkomlega reglulegt. Getum t.d. skoðað dæmið þar sem við höfum $\mathcal{L} \times \hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{L}} \times \hat{\mathcal{L}}$, þar sem $\mathcal{L}$ er langalínan og $\hat{\mathcal{L}}$ er þjöppunin á löngulínunni, sjá bls 203 í Munkres.

Afleiðing er

Setning 4.11 *Til er þjöppun βX fullkomlega reglulega rúmsins X (þ.e. þjappað Hausdorf-rúm sem inniheldur X sem þétt hlutrúm) þannig að sérhvert takmarkað raunfall á X hafi (nákvæmlega eina) samfellda framlengingu á βX.*

Sönnun
Athugum vörpunina $\Phi : X \to \prod_{f \in \mathcal{C}_b(X)} I_f$. Hún er greyping, samsömum X við myndmengið $\Phi[X]$ og látum $\beta X := \overline{\Phi[X]}$. Þá er βX lokað í þjöppuðu rúmi, því þjappað, og fyrir ofanvarpið $\mathrm{pr}_\Phi : \prod I_f \to I_f$ er $\mathrm{pr}_f|\beta X$ framlenging á f; ljóst að hún ákvarðast ótvírætt, vegna HS hér að neðan.

Hjálparsetning 4.2 *Ef $f, g : X \to Y$ eru samfelldar varpanir í Hausdorff-rúm Y, A er þétt í X og $f|A = g|A$, þá er $f = g$.*

Sönnun
Höfum $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}[\Delta_Y]$, þar sem $(f, g) : X \to Y \times Y$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ og $\Delta_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$ er hornalínan í Y. Ef Y er Hausdorff, þá er Δ_Y lokað mengi í $Y \times Y$, svo að $\{x : f(x) = g(x)\}$ er lokað, inniheldur A og því $\overline{A} = X$.

Setning 4.12 *Þjöppunin βX ákvarðast ótvírætt af eiginleikanum í síðustu setningu.*

Leyfum okkur því að skilgreina:

Skilgreining 47 *βX kallast* **Stone-Cech-þjöppun** *fullkomlega reglulega rúmsins X.*

Setningin er afleiðing af eftirfarandi setningu:

Setning 4.13 *Sérhver samfelld vörpun frá fullkomlega reglulegu rúmi X í þjappað Hausdorff-rúm C framlengist með nákvæmlega einum hætti í samfellda vörpun $\beta X \to C$.*

Sönnun
Megum gera ráð fyrir að C sé hlutrúm í teningi $[0, 1]^J$. Þannig að samfelld vörpun $f : X \to C$ er gefin með $f(x) = (f_j(x))_{j \in J}$, þar sem $f_j : X \to [0, 1]$; f_j framlengist í

$g_j : \beta X \to [0,1]$, og við höfum $g := (g_j) : X \to [0,1]^J$, þurfum að sjá að $g[\beta X] \subset C$. En

$$g[\beta X] = g[\overline{X}] \subset \overline{g[X]} = \overline{f[X]} \subset \overline{C} = C.$$

Gerum ráð fyrir að fullkomlega reglulegt grannrúm X hafi tvær þjappanir $\hat{X}_1$ og $\hat{X}_2$ þ.a. sérhver samfelld vörpun $X \to C$, þar sem C er þjappað, hafi framlengingu í vörpun $\hat{X}_k \to C$, $k = 1, 2$. Þá er til nákvæmlega ein grannmótun $\hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ þannig að $f(x) = f$ fyrir öll x úr X; því að ívarpið $X \hookrightarrow \hat{X}_2$ framlengist í samfellda vörpun $f : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ og ívarpið $X \hookrightarrow \hat{X}_1$ framlengist í samfellda vörpun $g : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$, og $g \circ f : \hat{X}_1 \to \hat{X}_1$ er samfelld, $g \circ f | X = \mathrm{id}_{\hat{X}_1} | X$, svo að $g \circ f = \mathrm{id}_{\hat{X}_1}$ og eins er $f \circ g = \mathrm{id}_{\hat{X}_2}$. Því hefur f samfellda andhverfu g og er því grannmótun.

(Þessi eiginleiki ákvarðar Stone-Cech þjöppunina ótvírætt.)

Athugasemd
Hægt er að sýna að $\beta(\mathbb{N})$ hefur fjöldatölu $2^{2^{\aleph_0}}$, en $\mathbb{R}$ hefur fjöldatölu $2^{\aleph_0}$, svo að $\beta(\mathbb{N})$ hefur hærri fjöldatölu en $\mathbb{R}$.

Skoðum nú framlengingarsetningu Tietze. Þurfum fyrst hjálparsetningu:

Hjálparsetning 4.3 *Látum A vera lokað hlutmengi í normlegu rúmi X og $g : A \to [-r, r]$ vera smafellt fall. Þá er til samfellt fall $h : X \to \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right]$ þannig að $|g - h| \leq \frac{2r}{3}$ á A.*

Sönnun
Látum $B := \{x \in A : g(x) \leq -\frac{r}{3}\}$ og $C := \{x \in A : g(x) \geq \frac{r}{3}\}$, nú eru B, C lokuð og sundurlæg svo að til eru $u : X \to [0,1]$ þ.a. $u|B = 1$, $u|C = 0$, þá er $h : \frac{2r}{3} u - \frac{r}{3}$ slíkt fall (Auðséð).

(T.d. er $-r \leq g \leq -\frac{r}{3}$, $h = \frac{r}{3}$ á B, svo að $-\frac{2r}{3} \leq g - h \leq 0$ á B o.s.frv.)

Setning 4.14 *(Framlengingarsetning Tietze-Úryson) Grannrúm X er normlegt þá og því aðeins að fyrir sérhvert lokað mengi A í X og sérhverja samfellda vörpun $g : A \to [0,1]$ er til samfelld vörpun $f : X \to [0,1]$, þ.a. $f|A = g$.*

Sönnun
($\Leftarrow$) Látum B, C vera sundurlæg lokuð mengi í X, $g : B \cup C \to [0,1]$ skilgreinum þessa vörpun með $g|B = 0$, $\;g|C = 1$ $f : X \to [0,1]$ vera samfellda framlengingu á g, $U := \{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\}$, $V := \{x \in X, f(x) > \frac{1}{2}\}$, þá er U, V sundurlæg opin mengi þ.a. $B \subset U$ og $C \subset V$, svo að X er normlegt.
($\Rightarrow$) Megum taka bilið $[-1, 1]$ í stað $[0, 1]$. Skv.HS er til $f_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ þ.a. $|g - f_1| \leq \frac{2}{3}$ á A. Sýnum með þrepun að við fáum $f_n : X \to [-1 + (\frac{2}{3})^n, 1(\frac{2}{3})^n]$ þ.a. $|g - f_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Höfum f_1. Ef f_n hefur verið skilgreint, þá gefur HS vörpun

$h_n : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ þ.a. $|g - f_n - h_n| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ á A. Þá varpar $f_{n+1} = f_n + h_n$ rúminu í bilið $[-1 + (\frac{2}{3})^{n+1}, 1(\frac{2}{3})^{n+1}]$. Nú fæst fyrir $m \geq 1$.

$$|f_n - f_m| \leq |\sum_{k=n}^{m-1} h_k| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Allsstaðar, þ.e. $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ef $m \geq n$. Því er (f_n) samleitin runa í jöfnum mæli á X; þá er $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$ samfellt fall (eins og fyrir firðrúm) og varpar X í $[0, 1]$; runan stefnir auk þess á g í jöfnum mæli á A, svo að $f|A = g$.

Fylgisetning 4.2 *Látum A vera lokað hlutmengi í normlegu rúmi X. Þá hefur sérhvert samfellt fall $f : A \to \mathbb{R}$, samfellda framlengingu á allt X.*

Sönnun
Skv.setningu hefur arctan $f : A \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ samfelld framlengingu í vörpun $g : X \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Látum $B := g^{-1}[\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}]$. Þá er B lokað í X, $A \cap B = \varnothing$; og því til $h : X \to [0, 1]$ þannig að $h|A = 1$ og $h|B = 0$. Þá er $hg : X \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ samfelld framlenging á arctan f, svo að $\tan(hg)$ er samfelld framlenging á f.

Kafli 5

Algebrísk grannfræði

5.1 Innskot um ríki

Reynir segir að ríkjafræðin sé einu leveli hærri í abstrakt heldur en það sem við erum búin að vera að fást við. Við erum búin að kynnast fullt af ríkjum, án þess að tala sérstaklega um þau.

Skilgreining 48 *Ríki* $\mathbf{C}$ *er gefið með því að tiltaka flokk* $Ob\mathbf{C}$ *af stökum sem kallast hlutir ríkisins; og fyrir sérhverja tvo hluti* X, Y *í* $Ob\mathbf{C}$ *tiltekið mengi* $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ *af stökum sem við köllum mótanir frá* X *í* Y *(í ríkinu* $\mathbf{C}$*); og fyrir öll* X, Y, Z *í* $Ob\mathbf{C}$ *tiltekna vörpun*

$$Hom_{\mathbf{C}} \times Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, Z), \ (f, g) \mapsto g \circ f$$

þannig að eftirfarandi skilyrðum sé fullnægt:

1. *Mengin* $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ *og* $Hom_{\mathbf{C}}(Z, T)$ *eru sundurlæg, nema* $X = Z$ *og* $Y = T$.

2. *Fyrir sérhvert stak* X *í* $Ob\mathbf{C}$ *höfum við tiltekið stak* id_X *í* $Hom_{\mathbf{C}}(X, X)$ *þannig að*

$$f \circ id_X = f, \ id_X \circ g = g$$

   fyrir öll f *úr* $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ *og öll* g *úr* $Hom_{\mathbf{C}}(Y, X)$ *og öll* Y.

3. *Fyrir öll* X, Y, Z, T *og öll* f *úr* $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, g *úr* $Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$, h *úr* $Hom_{\mathbf{C}}(Z, T)$ *er*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Það er ákveðið mengjafræðilegt vandmál hér, því við erum ekki með mengi í skiglreiningunni.

Athugasemd
Með **flokk** er átt við samsafn af stökum sem er hugsanlega of stórt til að vera mengi. Í Zermelo-Fraenkel-mengjafræði eru flokkar gervihugtök: flokkar eru skilgreindr með eiginleikum, $F = \{x : P(x)\}$; og $x \in F$ er þá talið skammstöfun fyrir $P(x)$.

Flokkar geta ekki verið stök í öðrum flokkum. Við getum talað um flokk allra mengja. Ríki er sagt vera ***lítið*** ef flokkurinn Ob**C** er mengi.

Skoðum nokkur sýnidæmi

Sýnidæmi 5.1.1 1. Mengi ásamt vörpunum milli mengja mynda ríki. **Men** er flokkur allra mengja, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Men}}(X,Y)$ er mengi allra varpana $f : X \to Y$, þar sem samskeytingin er venjulega samskeyting varpana.

2. ***Grúpuríkið*** **Gr**: Ob**Gr** er flokkur allra grúpna og mótanirnar eru grúpumótanir. Eins fæst ***víxlgrúpuríkið*** **Ab**, ***baugaríkið***, $K-\mathbf{Lin}$ = ríki K-vigurrúma og K-línulegra varpana.

3. Firðrúm og firðræknar varpanir mynda ríki.

4. Grannrúm og samfelldar varpanir mynda ríki, oft kallað **Top**.

5. **Punktað grannrúm** er tvennd (X, x) þar sem X er grannrúm og $x \in X$. **Punktuð samfelld vörpun** $(X, x) \to (Y, y)$ milli grannrúma er samfelld vörpun $f : X \to Y$ þannig að $f(x) = y$. Punktuð grannrúm ásamt punktuðum samfelldum vörpunum mynda ríki $\mathbf{Top}_*$.

   Í öllum þessum dæmum eru hlutirnir í ríkinu mengi með einhverju "aukamynztriog mótanirnar eru varpanir af tiltekinni gerð; samsendarvörpunin er samsendarmótunin og samskeytingin venjuleg.

6. Látum H vera hálfgrúpu með hlutleysu (þ.e. eining), þ.e. H hefur tengna reikniaðgerð sem hefur hlutleysu. Þá getum við búið til ríki **H** sem hefur nákvæmlega einn hlut x þanngi að $\mathbf{Hom}_{\mathbf{H}}(x, x) = \mathbf{H}$ og samskeytingin er reikniaðgerðin í **H**.

7. Látum $(X, \leq)$ vera *forraðað* mengi., þ.e. $\leq$ er venzl á X þ.a. $x \leq x$ fyrir öll x og af $x \leq y$ og $y \leq z$ leiði $x \leq z$. Gerum X að (litlu) ríki **X** með því að setja Ob$\mathbf{X} = X$ og með því að krefjast þess að $\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(x, y)$ hafi nákv. eitt stak (t.d. tvenndina (y, x)) ef $x \leq y$., en sé tómt annars. Samskeytingin ákvarðast ótvírætt: Verðum að hafa

   $$(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$$

   ef $x \leq y$ og $y \leq z$. Gerum á hinn boginn ráð fyrir að **X** sé lítið ríki þ.a. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(x, y)$ hafi í *hæsta lagi eitt stak* fyrir öll x, y úr $\mathrm{Ob}_{\mathbf{X}}$. Þá má skilgreina fyrir forröðun á $X := \mathrm{Ob}_{\mathbf{X}}$ með

   $$x \leq y \quad \text{þþaa} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(x, y) \neq \varnothing.$$

5.1.1 Samtoganir

Næstu dæmi þurfa undirbúning.

Skilgreining 49 *Látum X vera grannrúm, $A \subset X$ og $f, g : X \to Y$ vera samfelldar varpanir.* ***Samtogun frá** f **til** g **miðað við mengið** A* *er samfelld vörpun*

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

þ.a. eftirfarandi tveimur skilyrðum sé fullnægt:

(i) $H(x,0) = f(x)$ og $H(x,1) = g(x)$ fyrir öll x úr X.

(ii) $H(a,t) = f(a)$ fyrir öll $a \in A$ og öll $t \in [0,1]$.

Segjum að f, g seú samtoga miðað við A og skrifum

$$f \simeq_A g$$

ef slík samtogun er til. ***Samtogun frá** f **til** g* *er samtogun miðað við $\varnothing$ og þá skrifum við bara*

$$f \simeq g.$$

Athugasemd
Ef $f \simeq_A g$, þá er $f|A = g|A$

Setning 5.1 *Látum X, Y vera grannrúm og $A \subset X$ og $a : A \to Y$ vera samfellda vörpun. Venzlin $\simeq_A$ eru jafngildisvenzl á mengi allra samfelldra varpana $f : X \to Y$ þannig að $f|A = a$.*

Sönnun
Látum $f : X \to Y$ vera samf. vörpun þannig að $f|A = a$. Þá er $H : X \times [0,1] \to Y$, $H(x,t) = f(x)$ samtogun frá f til f miðað við A, svo $f \simeq_A f$.
Ef H er samtogun frá f til g miðað við A þá er $H_1(x,t) := H(x, 1-t)$ samtogun frá g til f miðað við A, svo $f \simeq_A g$ hefur í för með sér $g \simeq_A f$.
Ef H_1 er samtogun frá f til g miðað við A og H_2 er samtogunf frá g til h miðað við A, þá fæst samtogun H frá f til h miðað við A með

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{ef } 0 \le t \le 1/2. \\ H_2(x, 2t-1) & \text{ef } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Skilgreining 50 *Jafngildisflokkur m.t.t. venzlanna $\simeq_A$ kallast* ***samtogunarflokkur*** *miðað við A.*

Setning 5.2 *Látum X, Y, Z vera granrúm, $A \subset X$, $B \subset Y$ og $f_1, f_2 : X \to Y$ vera samfelldar varpanir þannig að $f_1|A = f_2|A$ og $f_1[A] = f_2[A] \subset B$ og $g_1, g_2 : Y \to Z$ vera samfelldar varpanir þ.a. $g_1|B = g_2|B$. Ef $f_1 \simeq_A f_2$ og $g_1 \simeq_B g_2$ þá er $f_1 \circ g_1 \simeq_A g_2 \circ f_2$.*

Sönnun
Látum $H_1 : f_1 \simeq_A f_2$, $H_2 : g_1 \simeq_B g_2$. Skilgreinum $H_3 : X \times [0,1] \to Z$ með

$$H_3(x,t) = H_2(H_1(x,t),t),$$

þá er $H_3 : f_1 \circ g_1 \simeq_A g_2 \circ f_2$.

Skilgreining 51 *Samtogunarríkið* ***Hot*** *hefur öll grannrúm sem hluti, en mótun $X \to Y$ er samtogunarflokkur allra varpana (miðað við $\varnothing$). Höfum*

$$[f] \circ [g] = [f \circ g]$$

þar sem [ ] táknar samtogunarflokk (miðað við $\varnothing$).

Punktaða samtogunarríkið $\mathbf{Hot}_*$ *er skilgreint þannig: Hlutir þess eru punktuð grannrúm; mótun $(X,x) \to (Y,y)$ er samtogunarflokkur punktaðra samfelldra varpana $(X.x) \to (Y,y)$ m.t.t. samtogunarvenzalanna miðað við $\{x\}$. Samskeytingin er gefin með*

$$[g]_{\{y\}} \circ [f]_{\{x\}} = [g \circ f]_{\{x\}}.$$

Skilgreining 52 *Látum* ***C*** *vera ríki. Mótun $f \in \mathbf{Hom_C}(X,Y)$ kallast* ***einsmótun*** *ef til er g úr $\mathbf{Hom_C}(Y,X)$ þannig að*

$$g \circ f = 1_X \quad og \quad f \circ g = 1_Y.$$

Segjum að X og Y séu ***einsmóta í C*** *ef til er einsmótun frá X til Y. Skrifum þá*

$$X \cong_{\mathbf{C}} Y \quad eða \quad X \cong Y.$$

Athugasemd
Mótunin g þannig að $g \circ f = 1_X$ og $f \circ g = 1_Y$, ef til er, ákvarðast ótvírætt og kallast **andhverfa** f í **C**.
Nefnilega ef g' er önnur slík mótun þá er

$$g = g \circ 1_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = 1_X \circ g' = g'.$$

Sýnidæmi 5.1.2 Setjum

$$\mathbb{S}_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$$

og $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $x \mapsto x$ vera ívarpið. Skilgreinum $g : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \dfrac{x}{||x||}$.
Þá er

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}_n}$$

en $f \circ g$ er vörpun $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \dfrac{x}{||x||}$. Fyrir $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ liggur strikið frá x til $\dfrac{x}{||x||}$ **ekki** gegnum 0. Fáum því vörpun

$$H : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

með
$$H(x,s) := (1-s)x + s\frac{x}{||x||}.$$
Þá er H samtogun
$$H : \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}} \simeq f \circ g.$$
Það þýðir að samtogunarflokkurinn $[f]$ er einsmótun með andhverfu $[g]$. Rúmin $\mathbb{S}_n$ og $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ eru einsmóta í **Hot** [þau eru ekki grannmóta, þótt að við getum ekki sýnt það með þeim aðferðum sem við höfum nú].

Skilgreining 53 **Upphafshlutur** *í ríki* $\boldsymbol{C}$ *er hlutur* U *í* C *þannig að* $Hom_{\mathbf{C}}(U,X)$ *hafi nákvæmlega eitt stak fyrir öll* X *úr* $Ob\boldsymbol{C}$. **Lokahlutur** *í* $\boldsymbol{C}$ *er þá hlutur* L *í* $\boldsymbol{C}$ *þannig að* $Hom_{\mathbf{C}}(X,L)$ *hagi nákvæmlega eitt stak fyrir öll* X *úr* $Ob\boldsymbol{C}$.

Setning 5.3 *Allir upphafshlutir í ríki* $\boldsymbol{C}$ *eru einsmóta: Ef* U_1, U_2 *eru upphafshlutir, þá er til* ***nákvæmlega ein*** *einsmótun* $f : U_1 \to U_2$.

Athugasemd
Skrifum oft $f : X \to Y$ í stað $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$.

Sönnun
Til er nákvæmlega ein mótun $f : U_1 \to U_2$ og nákvæmlega ein mótun $g : U_2 \to U_1$. Þá er $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U_1,U_1) = \{1_{U_1}\}$ og $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U_2,U_2) = \{1_{U_2}\}$, svo að $g = f^{-1}$.

Sýnidæmi 5.1.3

1. $\varnothing$ er upphafshlutur í **Men**; sérhver einstökungur er lokahlutur í **Men**.

   Núllgrúpa $\{0\}$ er bæði upphafshlutur og lokahlutur í **Ab**.

2. Látum $(A_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af hlutum í **C** og búum til nýtt ríki $\mathbf{C}_\pi$ þannig: Hlutur í $\mathbf{C}_\pi$ er fjölskylda $(f_i : X \to A_i)_{i\in I}$ af mótunum $f_i : X \to A_i$ frá föstum hlut X í **C**. Mótun í $\mathbf{C}_\pi$ frá $(f_i : X \to A_i)_{i\in I}$ í $(g_i : Y \to A_i)_{i\in I}$ er einfaldlega mótun $h : X \to Y$ þ.a. örvaritið

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_i"'] & & Y \arrow[dl, "g_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

   sé víxlið, þ.e. $g_i \circ h = f_i$ fyrir öll i úr I. Lokahlutur í $\mathbf{C}_\pi$, ***ef til er***, kallast ***margfeldi*** fjölskyldunnar $(A_i)_{i\in I}$ og það er táknað $(\mathrm{pr}_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i)_{i\in I}$. Ekki er víst að margfeldið sé alltaf til. Ef við hefðum snúið við X og A_i í vörpununum, þá hefðum við fengið summu en ekki margfeldi.

Skilgreining 54 *Látum* $\mathbf{C}$ *vera ríki. Þá fæst nýtt ríki* $\mathbf{C}^\circ$ *með því að setja* $Ob\mathbf{C}^\circ = Ob\mathbf{C}$ *og*

$$Hom_{\mathbf{C}^\circ}(X,Y) = Hom_{\mathbf{C}}(Y,X)$$

þ.e. $\mathbf{C}^\circ$ *fæst úr* $\mathbf{C}$ *með þvi að snúa við öllum örvum. Köllum* $\mathbf{C}^\circ$ **nykurríki** *ríkisins* $\mathbf{C}$.

Athugasemd
Sérhvert hugtak í $\mathbf{C}$ hefur nykurhugtak. Sem er samsvarandi hugtak í $\mathbf{C}^\circ$; gjarnan gefið til kynna með forskeytinu „hjá-"("co-"). ("co-") forskeytið fór að taka öfuga þýðingu í árdaga deildarúmfræðinnar, þegar sögulegt slys varð og menn rugluðust á covariant og contravariant. ***Hjámargfeldi*** í $\mathbf{C}$ (eða summa) er margfeldi í $\mathbf{C}^\circ$. Það er upphafshlutur í ríkinu með $(f_i : A_i \to X)_{i\in I}$ og mótun frá $(f_i : A_i \to X)$ í $(g_i : A_i \to Y)$ er $h : X \to Y$ þ.a.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] & & Y \\
& A_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Sé víxlið fyrir öll i.

Skilgreining 55 *1.* **Varpi** $F : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ *frá* $\mathbf{C}_1$ *í ríki* $\mathbf{C}_2$ *er vörpun sem úthlutar sérhverjum hlut* X *í* $\mathbf{C}_1$ *ákveðnum hlut* $F(X)$ *í* $\mathbf{C}_2$ *og sérhverri mótun* $f : X \to Y$ *í* $\mathbf{C}_1$ *tiltekinni mótun* $F(f) : F(X) \to F(Y)$ *þannig að gildi:*

   (a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$ *fyrir alla hluti* X *í* $\mathbf{C}_1$.

   (b) Ef $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *er mótanir í* $\mathbf{C}_1$*, þá er*

   $$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

2. **Hjávarpi** *frá* $\mathbf{C}_1$ *til* $\mathbf{C}_2$ *er varpi frá* $\mathbf{C}_1$ *til* $\mathbf{C}_2^\circ$*; m.ö.o. vörpun sem úthlutar* X *úr* $Ob\mathbf{C}_1$ *hlut í* $F(x)$ *úr* $Ob\mathbf{C}_2$ *og mótun* $f : X \to Y$ *í* $\mathbf{C}_1$ *mótun* $F(f) : F(Y) \to F(X)$ *í* $\mathbf{C}_2$ *þ.a.*

   (a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$*;*

   (b) Ef $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *eru mótanir í* $\mathbf{C}_1$*, þá er*

   $$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Sýnidæmi 5.1.4 1. Til er fullt af „gleymsku vörpum"; t.d. varpi sem varpar grúpu G á mengið G og grúpumótun $G_1 \varphi{\to} G_2$ á mengjavörpun φ er varpi $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Men}$.

2. Látum G vera grúpu og (G,G) vera normlegu hlutgrúpuna sem er spönnuð af öllum víxlum $xyx^{-1}y^{-1}$ í G. Setjum

$$Ab\ G := G/(G,G)$$

(Þannig að $xy = yx$ fyrir öll stök í grúpunni). Þá er þetta víxlgrúpa og við höfum varpa

$$Ab: \ \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab},$$

því að grúpumótun $\varphi : G_1 \to G_2$ varpar (G_1, G_1) í (G_2, G_2) og gefur þá af sér grúpumótun $\mathrm{Ab}(G_1) \to \mathrm{Ab}(G_2)$.

3. Látum $\mathbf{Top}_{freg}$ vera ríki allra fullkomlega reglulegra rúma og **Comp** ríki allra þjappaðra Hausdorff-rúma. Stone-Cech-þjöppunin er varpi $\beta : \mathbf{Top}_{freg} \to \mathbf{Comp}$: Fyrir $f : X \to Y$ samfellda vörpun fæst

$$\begin{array}{ccccc} \beta X & \xrightarrow{\beta f} & \beta Y & \xrightarrow{\beta g} & \beta Z \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

4. Látum K vera sviðm $K - \mathbf{Lin}$ vera ríki allra K-línulegra rúma. Setjum

$$V^V := \mathrm{Hom}_{K-\mathbf{Lin}}(V, K)$$

Fyrir $f : V \to W$ línulega vörpun fæst nykurvörpunin

$$f^V : W^V \to V^V, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ f.$$

þetta skilgreinir hjávarpa frá $K - \mathbf{Lin}$ yfir $K - \mathbf{Lin}$.

5. Látum X vera grannrúm og $\pi_0(X)$ vera mengi allra samhengisþátta X. Ef $f : X \to Y$ er samfelld vörpun og C er samhengisþáttur í X, þá er $f[C]$ samanhangandi og því innihaldin í nákvæmlega einum samhengisþætti rúmsins Y; köllum hann $\pi_0(f)(C)$. Fáum þá vörpun

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y).$$

Sjáum að þetta gefur varpa $\pi_0 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Men}$.

Kafli 6

Undirstöðugrúpa

6.1 Inngangur

Skilgreining 56 **Ferill** *í* X *er samfelld vörpun* $\alpha : [0,1] \to X$*;* $\alpha(0)$ *er* **upphafspunktur***,* $\alpha(1)$ **lokapunktur** α*,* α *er ferill frá* $\alpha(0)$ *til* $\alpha(1)$ *í* X*.*
Látum $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ *vera ferla. Samtogun* $H : \alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$ *miðað við* $\{0,1\}$ *kallast* **ferilsamtögun** *frá* α *til* β*; ef slíkt* H *er til, þá kallast* α, β **ferilsamtoga***; höfum þá* $\alpha(0) = \beta(0)$ *og* $\alpha(1) = \beta(1)$*.*
Látum $p \in X$*. Fasti ferillinn* $[0,1] \to X, \quad t \mapsto p$ *er táknuð* ε_p*. Fyrir ferla* α, β *í* X *þ.a.* $\alpha(1) = \beta(0)$ *skilgreinum við feril* $\alpha * \beta$ *í* X *með*

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{ef} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{ef} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

og setjum líka

$$\alpha^-(t) := \alpha(1-t).$$

Köllum $\alpha * \beta$ **samsetningu** *ferlana og* α *og* β *og* α^- **öfuga ferilinn** *við* α*.*

Setning 6.1

1. *Látum* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *vera samfellda vörpun þannig að* $\varphi(0) = 0$ *og* $\varphi(1) = 1$ *og* $\alpha : [0,1] \to X$ *er ferill, þá eru ferlarnir* $\alpha \circ \varphi$ *og* α *ferilsamtoga, skrifum*

$$\alpha \circ \varphi \simeq_{fer} \alpha.$$

2. *Látum* $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to X$ *vera ferla þ.a.* $\alpha(1) = \beta(0)$ *og* $\beta(1) = \gamma(0)$*. Þá er*

$$\alpha * (\beta * \gamma) \simeq_{fer} (\alpha * \beta)\gamma.$$

3. *Látum* $\alpha : [0,1] \to X$ *vera feril og* $p = \alpha(0)$*,* $q = \alpha(1)$*. Þá er*

$$\epsilon_p * \alpha \simeq_{fer} \alpha \quad \text{og} \quad \alpha * \epsilon_q \simeq_{fer} \alpha.$$

4. *Látum* $\alpha : [0,1] \to X$ *vera feril,* $p := \alpha(0)$ *og* $q := \alpha(1)$*. Þá er*

$$\alpha * \alpha^- \simeq_{fer} \epsilon_p \quad \text{og} \quad \alpha^- * \alpha \simeq_{fer} \epsilon_q$$

Sönnun

1. Höfum ferilsamtogun

$$H(t,s) = \alpha(\varphi(t)(1-s)+ts).$$

2. Við höfum $(\alpha * (\beta * \gamma)) \circ \varphi = (\alpha * \beta) * \gamma$ þar sem

$$\varphi(t) := \begin{cases} 2t & \text{ef} \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{4} + t & \text{ef} \quad t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t & \text{ef} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

og notum (1).

3. $\epsilon_p * \alpha = \alpha \circ \varphi$, þar sem

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{ef} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t-1 & \text{ef} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

og $\alpha * \epsilon_q = \alpha \circ \psi$, þar sem

$$\psi(t) := \begin{cases} 2t & \text{ef} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{ef} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad .$$

4. Við höfum $\alpha * \alpha^- = \alpha \circ \varphi$, þar sem

$$\varphi(t) := \begin{cases} 2t & \text{ef} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2t & \text{ef} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad .$$

og samtogun frá $\alpha * \alpha^-$ til ϵ_p fæst með

$$H(t,s) := \alpha((1-s)\varphi(t)).$$

Höfum $\alpha^- * \alpha = \alpha \circ \psi$, þar sem

$$\psi(t) := \begin{cases} 1-2t & \text{ef} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t-1 & \text{ef} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad .$$

og samtogun frá $\alpha^- * \alpha$ til ϵ_q fæst með

$$H(t,s) = \alpha((1-s)\psi(t)+s).$$

Setning 6.2 *Látum $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ vera ferla í X þannig að $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$, $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = \beta_1(0) = \beta_2(0)$ og $\beta_1(1) = \beta_2(1)$. Ef $\alpha_1 \simeq_{fer} \alpha_2$ og $\beta_1 \simeq_{fer} \beta_2$, þá er $\alpha_1 * \beta_1 \simeq_{fer} \alpha_2 * \beta_2$.*

Sönnun
Látum $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ vera ferilsamtogun frá α_1 til α_2 og H_2 vera ferilsamtogun frá β_1 til β_2, þá er H_3

$$H_3(t,s) := \begin{cases} H_1(2t,s) & \text{ef} \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \\ H_1(2t-1,s) & \text{ef} \quad t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

ferilsamtogun frá $\alpha_1 * \beta_1$ til $\alpha_2 * \beta_2$.

Athugasemd
Afleiðing: Við fáum reikniaðgerð á ferilsamtogunarflokkum með því að setja

$$[\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha * \beta],$$

og við höfum tengireglu

$$[\alpha]\cdot([\beta]\cdot[\gamma]) = ([\alpha]\cdot[\beta])\cdot[\gamma],$$

höfum einnig

$$[\epsilon_p]\cdot[\alpha] = \alpha = [\alpha]\cdot[\epsilon_q]$$

þar sem $\alpha(0) = p$ og $\alpha(1) = q$; og með sömu forsendum er

$$[\alpha]\cdot[\alpha^-] = [\epsilon_p],\ [\alpha^-][\alpha] = [\epsilon_q].$$

Þetta þýðir: Við getum fyrir sérhvert grannrúm skilgreint ríki þannig að hlutir ríkisins eru punktarnir í X og mótun frá q til p er ferilsamtogunarflokkur ferils frá p til q; samsemdarmótun p er $[\epsilon_p]$, og sérhver mótun í ríkinu er einsmótun: $[\alpha]^{-1} = [\alpha^-]$. Köllum þetta ríki ***undirstöðugrýpi*** rúmsins X.

Skilgreining 57 Grýpi *er (lítið) ríki þannig að sérhver mótun hafi andhverfu(þ.e. sé einsmótun).*

Fyrir sérhvert $\mathbf{C}$ mynda allar einsmótanir $X \to X$, X fast, grúpu $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$, sem er sjálfmótanagrúpa hlutarins X. (Getum litið á þetta sem hlutskilgreinda margföldun, sérhvert stak hefur einingarstak frá hægri og vinstri, aðgerðin er tengin og sérhvert stak hefur andhverfu, þetta er alhæfing á grúpu. Grúpa er grýpi þar sem sérhvert vörpun eigi sér andhverfu) Fyrir grýpi $\mathbf{C}$ er $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X)$.

Skilgreining 58 *Látum X vera grannrúm og $x \in X$. Grúpa allra ferilsamtogunarslokka lokaðra ferla í x kallast* **undirstöðugrúpa** *rúmsins X í punktinum x og er táknuð.*

$$\pi_1(X,x)$$

Setning 6.3
1. *Látum $f : X \to Y$ vera samfellda vörpun og α_1, α_2 vera ferilsamtoga ferla í X. Þá eru $f\circ\alpha_1$ og $f\circ\alpha_2$ ferilsamtoga í Y.*
2. *Látum α vera lokaðan feril í X með endapunkt x og $f,g : X \to Y$ vera samtoga miðað $\{x\}$(halda x föstu); þá er $f\circ\alpha$ og $g\circ\alpha$ samtoga miðað við $f(x) = g(x)$ í Y.*

Sönnun
Augljóst.

Afleiðing:

Setning 6.4 *Samfelld vörpun $f : X \to Y$ þannig að $f(x) = y$ gefur af sér grúpumótun*

$$f_* = \pi_1(f, x) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y).$$

Fyrir varpanir $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ þ.a. $f(x) = y$ og $g(y) = z$ er

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Z, z),$$

Líka er $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x)}$; m.ö.o. gefur undirstöðugrúpan af sér varpa

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Gr}, \quad (X, x) \mapsto \pi_1(X, x).$$

Sönnun
Skv. síðustu setningu er f_* vel skilgreint. Það er grúpumótun, því að $f \circ (\alpha_1 * \alpha_2) = (f \circ \alpha_1) * (f \circ \alpha_2)$. Annað er augljóst.

Af lið (2) í næst-seinustu setningu leiðir: Varpinn π_1 þáttast gegnum $\mathbf{Hot}_*$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Top}_* \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d] & \mathbf{Gr} \\
\mathbf{Hot}_* \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ef $f : (X, x) \to (Y, y)$ er einsmótun í $\mathbf{Hot}_*$, þá er $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ einsmótun.

Athugasemd
Varpi $F : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ varpar einsmótun á einsmótun: Ef $f : X \to Y$ er einsmótun, þá eru $\mathrm{id}_{F(X)} = F(\mathrm{id}_X) = F(f^{-1} \circ f) = F(f^{-1}) \circ F(f)$ og $\mathrm{id}_{F(Y)} = F(\mathrm{id}_Y) = F(f) \circ F(f^{-1})$, svo að $F(f)$ hefur andhvefuna $F(f^{-1})$. Hér opnast glufa til að sýna að tvö grannrúm seú ekki einsmóta, þarf þá að sýna að undirstöðugrúpurnar séu ekki einsmóta.

Setning 6.5 *Látum $\gamma : [0, 1]$ vera feril frá x til y í X. Þá er vörpunin*

$$\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y), \quad [\alpha] \mapsto [\gamma]^{-1}[\alpha][\gamma]$$

grúpueinsmótun.

Sönnun
Augljóst. $[\gamma]^{-1}[\alpha][\beta][\gamma] = [\gamma]^{-1}[\alpha][\gamma][\gamma]^{-1}[\beta][\gamma]$.

Fylgisetning 6.1 *Ef X er ferilsamanhangandi, þá eru allar undirstöðugrúpur þess $\pi_1(X,x)$ einsmóta.*

Höfum Ef X er ***samdraganlegt***, þ.e. einsmóta punkti í $\mathbf{Hot}_*$, þá er grúpan $\pi_1(X,x)$ fáfengileg, þ.e. hefur bara eitt stak.
Látum X vera grannrúm.

Skilgreining 59 Rúm yfir *X er tvennd (E,π) þar sem E er grannrúm og $\pi : E \to X$ er samfelld vörpun, kölluð* **ofanvarp**. *Ef (E_1,π_1), (E_2,π_2) eru rúm yfir X þá er mótun frá (E_1,π_1) í (E_2,π_2) samfelld vörpun $f : E_1 \to E_2$ þ.a. $\pi_2 \circ f = \pi_1$, þ.e. örvaritið*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"] & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd}$$

er víxlið.

Athugasemd
Að $f \circ \pi_2 = \pi_1$ þýðir að $f[\pi_1^{-1}[x]] \subset \pi_2^{-1}[x]$. Skrifum $E_{1,x} := \pi_1^{-1}[x]$ fyrir trefjuna yfir x, þá gefur f af sér vörpun $f_x : E_{1,x} \to E_{2,x}$ fyrir öll x úr X. Rúm yfir X mynda ríki $\mathbf{Top}/x$.

Ef (E,π) er rúm yfir X og U er opið í X, þá fæst rúm (E',π') yfir U með því að setja $E' = \pi^{-1}[U]$ og $\pi' := \pi|E' : E' \to U$. Köllum þetta ***einskorðun*** (E,π) við U; skrifum óformlega $E|U$. Einskorðunin er varpi $\mathbf{Top}/x \to \mathbf{Top}/U$.

Athugasemd
Almennar: Látum

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

vera grannrúm og samfelldar varpanir. Köllum

$$E \times_X Y := \{(e,y) \in E \times Y : \pi(e) = g(y)\}$$

kallast ***trefjumargfeldi*** E og Y yfir X; höfum náttúrlegt ofanvarp $E \times_X Y \to X$, $(e,y) \mapsto \pi(e) = g(y)$, og höfum

$$(E \times_X Y)_x = E_x \times Y_x$$

fyrir öll x. Þetta er margfeldi í ríkinu $\mathbf{Top}_X$: Fyrir $Z := E \times_X Y$ fæst víxlin ferningur (ath: $p_1(e,y) = e$ og $p_2(e,y) = y$)

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

þ.a. fyrir sérhvern víxlinn ferning

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

er til nákvæmlega ein samfelld vörpun $h : T \to Z$ þannig að:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "q_1"] \arrow[ddr, "q_2"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

sé víxlið. Ferningur

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

í ríki $\mathbf{C}$ sem fullnægir þessu skilyrði heitir ***karteskur ferningur***. Athugum að $Z_y \simeq E_x$ ef $y \mapsto x$.
Fyrir $g : Y \to X$ fæst varpi

$$g^* : \mathbf{Top}/X \to \mathbf{Top}/Y$$
$$g^*E := E \times_X Y$$

með ofanvarpinu $E \times_X Y \to Y, \quad (e, y) \mapsto y$. Einskorðun E við opið mengi U er i^*E, þar sem $i : U \hookrightarrow X$.

Skilgreining 60 *Rúm (E, π) yfir X er* **látlaust***(e.* trivial*) með trefju F ef til er grannrúm F þannig að (E, π) sé einsmóta $pr_1 : X \times F \to X$ í $\mathbf{Top}_X$, þ.e. við höfum grannmótun h sem gerir*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"] & X \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ X & \end{tikzcd}$$

víxlið. Rúm E yfir X kallast **staðlátlaust með trefju** *F ef fyrir sérhvern punkt x í X er til opin grennd U um x þ.a. $E|U$ sé látlaust (með trefju F).*

Athugasemd
Ef E er látlaust yfir X með trefju F, þá eru allar trefjurnar E_x grannmóta F.
Ef E er staðlátlaust þá gætu trefjurnar orðið ólíkar yfir mismunandi samhengisþátta X. Ef trefjan er sú sama allsstaðar, þá segjum við líka að $\pi : E \to X$ sé ***trefjubundin*** með trefju F.

Sýnidæmi 6.1.1 Látum F vera grannrúm og $\varphi : F \to F$ vera grannmótun: Tökum $F \times [0,1]$ og límum $(x,0)$ við $(\varphi(x),1)$ fyrir öll x úr F. Fáum ofanvarp frá grannrúminu sem þannig fæst á rúmið sem fæst úr $[0,1]$ með því að líma 0 við 1, sem er grannmóta $\mathbb{S}_1$. Fáum þannig trefjabundin yfir $\mathbb{S}_1$ með trefju F.
Ef $F = [0,1]$ og $\varphi = \mathrm{id}_{[0,1]}$, þá fæst sívalningsflötur, ef φ er gefið með $\varphi(t) = 1-t$, þá fæst Möbíusarræma. Sjáum að sívalningur og Möbíusarræma eru bæði trefjabundin yfir hring og trefjan er $[0,1]$.
Ef $F = \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ og $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{U}}$ þá fæst hjólflötur. Ef $F = \mathbb{U}$ og φ er gefið með $\varphi(z) = \overline{z}$, þá fæst Klein-flaska, sem er trefjubundin yfir $\mathbb{S}_1$ með trefju $\mathbb{S}_1$.

Skilgreining 61 Þekjurúm *(e.* Covering space*) yfir X er staðlátlaust rúm yfir X með strjálum trefjum, þ.e. trefjan er einfaldlega mengi með strjála grannmynztrinu; köllum þá π þekjuvörpun.*

Setning 6.6 *Rúm (E,π) yfir X er þekjurúm þ.þ.a.a. fyrir sérhvert x úr X sé til opin grennd U um x þ.a. $\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} U_i$ þar sem $(U_i)_{i\in I}$ er fjölskylda af opnum hlutmengjum í E þ.a. $U_i \cap U_j = \varnothing$ ef $i \neq j$ og π gefur af sér grannmótun frá U_i á U fyrir sérhvert i úr I.*

Athugasemd
Segjum þá að U sé ***jafnþakið*** af π.

Sönnun
Gefin svona U og $(U_i)_{i\in I}$ þá fæst einsmótun $E|U \to U \times I$, $x \mapsto (\pi(x), i)$ fyrir $i \in I$ í $\mathbf{Top}_U$. Öfugt ef $E|U$ er látlaust með trefju I og $\varphi : U \times I \to \pi^{-1}[U]$ er einsmóta í $\mathbf{Top}_U$, setjum þá $U_i = \varphi(U \times \{i\})$.

Sýnidæmi 6.1.2

1. Vörpun $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ er þekjuvörpun: Ef $z \in \mathbb{C}^*$, veljum $u \in \mathbb{U}$ þ.a $z \notin \mathbb{R}_+ u_0$, $u = e^{it_0}$ þá er fyrir $U := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ u$

$$\exp^{-1}[U] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n$$

þar sem $U_n := \{z \in \mathbb{C} : t_0 + 2\pi n < \mathrm{Im}(z) < t_0 + 2\pi(n+1)\}$ og exp varpar U_n grannmóta á U.

2. Af þessu leiðir líka: Vörpunin $\mathbb{R} \to \mathbb{S}_1,\ t \mapsto e^{it}$ er þekjuvörpun.
3. Látum n vera náttúrulega tölu, $n \geq 1$. Þá er $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \to z^n$ þekjuvörpun.
4. Látum $n \geq 0$: Vörpunin $\mathbb{S}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n$ sem tekur x á $\mathbb{R}x$ er þekjuvörpun; fyrir hvert p úr $\mathbb{P}_n$ eru til nákvæmlega tvö x úr $\mathbb{S}_n$ sem varpast á p. Munum að $\mathbb{P}_n = \mathbb{S}_n / \sim$ þar sem $x_1 \sim x_2$ þþaa $x_1 = \pm x_2$.

Skilgreining 62 *Látum (E, π) vera þekjurúm yfir X. Mótun frá E yfir í sjálft sig í* **Top**$/X$ *kallast þekjufærsla; það er með öðrum orðum samfelld vörpun $\varphi : E \to E$ þannig að $\pi \circ \varphi = \pi$. Gagntækar þekjufærslur eru sjálfkrafa grannmótanir og mynda því grúpu $Aut(E, \pi)$ stundum táknað $Gal(E, \pi)$.*
Almennar kallast mótun í **Top**$/X$ *milli þekjurúma þekjurúmamótun.*

Skilgreining 63 *Staðbundin grannmótun er (samfelld) vörpun $f : X \to Y$ milli grannrúma þ.a. fyrir sérhvern punkt x í X er til grennd U um x þannig að f gefi af sér grannmótun frá U á $f[U]$.*

Setning 6.7 *Ljóst er að þekjuvörpun er staðbundin grannmótun. Þekjurúmamótun er líka staðbundin grannmótun.*

Sönnun
Látum (E_1, π_1) og (E_2, π_2) vera þekjurúm yfir X og $e_1 \in E_1$; þá má finna grennd U um $x_1 := \pi_1(e_1)$ þ.a. U sé janþakin af π_1 og π_2. Þ.e. $\pi_1^{-1}[U] = \bigcup_{i \in I} U_i$ og $\pi_2^{-1}[U] = \bigcup_{j \in J} V_j$; þar sem (U_i), (V_j) eru sundurlægar fjölskyldur af opnum mengjum sem varpast grannmóta á U með ofanvörpunum π_1 og π_2.
Látum $\varphi : E_1 \to E_2$ vera þekjurúmamótun, i_0 vera stakið í I þannig að $e_! \in U_{i_0}$ og j_0 vera stakið í J þannig að $\varphi(e_1) \in V_{j_0}$. Þá er til grennd U'_{i_0} í U_{i_0} þannig að φ varpi U'_{i_0} í V_{j_0}. Þá má taka $U' := \pi_1[U'_{i_0}]$ í stað U og fáum þá að φ gefur af sér gagntæka vörpun frá U_{i_0} á V_{j_0} og við höfum

$$(\varphi|U_{i_0}) = (\pi_1|V_{j_0})^{-1} \circ (\pi_1|U_{i_0})$$

svo að $\varphi|U_{i_0} : U_{i_0} \to V_{j_0}$ er grannmótun. Hitt tilfellið gengur svipað fyrir sig.

Athugasemd
Staðbundin grannmótun er opin vörpun.

Skilgreining 64 *Látum (E, π) ver rúm yfir X og $f : Y \to X$ vera samfellda vörpun. Vörpun $G : Y \to E$ þannig að $\pi \circ g = f$ kallast lyfting f með tilliti til π.*

Athugasemd
Lyfting er bara mótun í **Top**$/X$.

Setning 6.8 *Látum (E, π) vera þekjurúm yfir X og $f : Y \to X$ vera samfellda vörpun. Ef Y er samanhangandi, þá ákvarðast lyfting vörpunarinnar f m.t.t. π (ef til er) af gildi sínu í einum punkti.*

Sönnun
Látum $g, h : Y \to X$ vera samfelldar varpanir þannig að $\pi \circ g = \pi \circ h = f$ og y vera punkt í Y þannig að $g(y) = h(y)$. Viljum sýna að $g = h$. Setjum $X := \{y \in Y : g(y) = h(y)\}$. Það nægir að sýna að W sé bæði opið og lokað í Y (augljóslega er það ekki tómt). Látum $y \in Y$, veljum grennd U um $f(y)$ sem er jafnþakin m.t.t. π, það er að segja $\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i \in I} U_i$, $(U_i)_{i \in I}$ er sundurlæg fjölskylda af opnum mengjum í E og π gefur af sér grannmótun $U_i \to U$ fyrir öll $i \in I$. Látum $i_1 \in I$ vera stakið þannig að $g(y) \in U_{i_1}$ og i_2 vera stakið þannig að $h(y) \in U_{i_2}$. Þá er til grennd V um y þannig að $g[V] \subset U_{i_1}$ og $h[V] \subset U_{i_2}$. Ef $i_1 = i_2$, þá er $g(v) = h(v)$ fyr $U_{i_1} \cap U_{i_2}$. Sjáum; Ef $y \in W$, þá er $V \subset W$, en ef $y \in Y \setminus W$ þá er $V \subset Y \setminus W$. Þar með er W bæði opið og lokað.
Vitum að $y_0 \in W$ og Y er samanhangandi, svo að $W = Y$, og því $g = h$.

Fylgisetning 6.2 *Þekjufærsla samanhangandi þekjurúms ákvarðast af einskorðun sinni við eina trefju.*

Athugasemd
Þekjufærsla $\varphi : E \to E$ gefur af sér vörpun $\varphi_x : E_x \to E_x$ frá trefjunni E_x á sjálfa sig; og φ_x er gagntæk.

Fylgisetning 6.3 *$Aut(\mathbb{C}, \exp) \simeq Aut(\mathbb{R}, \theta) \simeq \mathbb{Z}$; hér er $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $t \mapsto e^{it}$.*

Sönnun
Hliðranirnar $\varphi_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to z + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, eru þekjufærslur, því að $\exp \circ \phi_k = \exp$. Höfum $\exp^{-1}[1] = 2\pi ik$; ef φ er þekjufærlsa, þá er $\varphi(0) \in 2i\pi\mathbb{Z}$, segjum $\varphi(0) = 2i\pi k$. En þá er $\varphi(0) = \varphi_k(0)$, svo að skv. setningu er $\varphi = \varphi_k$, þ.a. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, \exp) = \{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ (vegna $\varphi_{j+k} = \varphi_j \circ \varphi_k$). Eins fyrir $(\mathbb{R}, \theta)$.

Setning 6.9 *Látum $E, \pi)$ vera þekjurúm yfir X, $n \in \mathbb{N}$. Þá hefur sérhver samfelld vörpun $f : [0, 1]^n \to X$ lyftingu.*

Sönnun
Látum $(V_i)_{i \in I}$ vera opna þakningu á X þannig að V_i sé jafnþakið fyrir öll i úr I. Þá er $(f^{-1}[V_i])_{i \in I}$ opin þakning teningsins $[0, 1]^n$, sem er þjappað firðrúm og hefur því Lebesgue-tölu λ; sem þýðir að fyrir $A \subset [0, 1]^n$ þannig að þvermál A sé minna ein λ er til i úr I þannig að $A \subset f^{-1}[V_i]$, þ.e. $f[A] \subset V_i$. En þá er ljóst að $f[A]$ hefur lyftingu, og við megum gefa okkur gildi lyftingarinnar í einum punkti. Skiptum

$[0,1]^n$ niður í minni lokaða teninga $A_1, ..., A_m$ þannig að gildi: $(A_1 \cup \cdot \cup A_k) \cap A_{k+1}$ er samanhangandi og ekki tómt. Þá getum við fengið lyftingu á $f|(A_1 \cup \cdots A_k)$ með þrepun yfir k; veljum $f|A_1$ af handahófi, og veljum $f|A_{k+1}$ þannig að það passi við $f|(A_1 \cup \cdots \cup A_k)$ í einum punkti, og þá í öllum punktum úr $(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}$.

Fylgisetning 6.4 *Látum $\pi : E \to X$ vera þekjuvörpun, $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ vera samtoga ferla þ.a. $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$, látum $e_0 \in E$ vera punkt þ.a. $\pi(e_0) = x_0$ og $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ vera lyftingar á α, β þ.a. $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = e_0$. Ef α, β eru ferilsamtoga í X þá eru $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ ferilsamtoga í E. (Hin áttin er augljós).*

Sönnun
Látum H vera ferilsamtogun frá α til β, þ.e. $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ er samfelld vörpun þ.a. $H(t,0) = \alpha(t)$, $H(t,1) = \beta(t)$ f.öll $t \in [0,1]$, svo $H(0,s) = \alpha(0)$ og $H(1,s) = \alpha(1)$ fyrir öll $s \in [0,1]$, sér í lagi er $\alpha(1) = \beta(1)$. Skv.setningu er til lyfting $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to E$ þ.a. $H(0,0) = e_0$; höfum $\pi \circ \tilde{H} = H$. Þá er $\pi \circ \tilde{H}(t,0) = H(t,0) = \alpha(t)$, $\pi \circ \tilde{H}(t,1) = H(t,1) = \beta(t)$, svo að $\tilde{H}(t,0) = \tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{H}(t,1) = \tilde{\beta}(t)$ því að lyfting ferlanna ákvarðast ótvírætt af gildi í einum punkti. Einnig er $\pi \circ \tilde{H}(0,s) = \alpha(0)$ fyrir öll s úr $[0,1]$, svo að $\tilde{H}(0,s) \in \pi^{-1}[x_0]$ fyrir öll s úr $[0,1]$; en $\pi^{-1}[x_0]$ er strjált rúm, svo $s \mapsto \tilde{H}(0,s)$ er föst vörpun og því $\tilde{H}(0,s) = e_0$ fyrir öll s. Eins er $\pi \circ \tilde{H}(1,s) = \alpha(1) =: x_1$ svo að $\tilde{H}(1,s) \in \pi^{-1}[x_1]$ fyrir öll s úr $[0,1]$, svo að $s \mapsto \tilde{H}(1,s)$ er föst vörpun og $\tilde{H}(1,0) = \tilde{\alpha}(1)$, svo að $\tilde{H}(1,s) = \alpha(1)$ fyrir öll s úr $[0,1]$.

Fylgisetning 6.5 *Ef $\pi : E \to X$ er þekjuvörpun, $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ eru ferilsamtoga ferlar í X og $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ eru lyftingar á α, β m.t.t. π þ.a. $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Þá er $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.*

Fylgisetning 6.6 $\pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Sönnun
Látum $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $\theta(t) = e^{2\pi i t}$. Fyrir lokaðan feril α í $\mathbb{S}_1$ þ.a. $\alpha(0) = \beta(0) = 1$, þá látum við $\tilde{\alpha}$ vera lynftingu á α þ.a. $\tilde{\alpha}(0) = 0$ og skilgreinum

$$\psi([\alpha]) := \tilde{\alpha}(1).$$

skv. setningu þetta vel skilgreint. Ef $[\alpha] = [\beta]$, þá er $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ þetta er grúpumótun: Látum $[\alpha], [\beta] \in \pi(\mathbb{S}_1, 1)$ og $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ vera lyftingar á α, β þ.a. $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$, og setjum $m := \tilde{\alpha}(1)$; þá er $\tilde{\tilde{\beta}} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\tilde{\tilde{\beta}}(t) = \tilde{\beta}(t) + m$ er lyfting á β þ.a. $\tilde{\tilde{\beta}}(0) = \tilde{\alpha}(1)$. Nú er $\tilde{\alpha} * \tilde{\tilde{\beta}}$ er vel skilgreind og lyfting á $\alpha * \beta$. En

$$(\tilde{\alpha} * \tilde{\tilde{\beta}})(1) = \tilde{\beta} + m = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1),$$

svo að

$$\psi([\alpha] \cdot [\beta]) = \psi([\alpha]) + \psi([\beta]).$$

Vörpunin ψ er einæk: Ef $\psi([\alpha]) = \psi([\beta])$, þ.e. $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, þá eru $\tilde{\alpha}$ og $b\tilde{eta}$ ferilsamtoga í $\mathbb{R}$: $H(t,s) = (1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t)$ er ferilsamtogun; og þá er $\theta \circ H$ ferilsamtogun frá α til β, svo að $[\alpha] = [\beta]$.
Vörpunin ψ er átæk: Látum $\alpha(t) = \theta(nt)$, $n \in \mathbb{Z}$, þá er $\alpha(1) = \theta(2\pi i n) = 1$, $\alpha(0) = 1$, svo að α er lokaður ferill með endapunkt 1 og augljóslega $\tilde{\alpha} = nt$, svo að

$$\psi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = n.$$

Sýnidæmi 6.1.3 Sýnum að ekki er til samfelld vörpun frá $\mathbb{E}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ á $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ þannig að $f(z) = z$ fyrir öll z úr $\mathbb{S}_1$.
Ef slík vörpun væri til þá er sér í lagi $f(1) = 1$ og við höfum víxlið örvarit í $\mathbf{Top}_*$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{S}_1, 1) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{S}_1}"] & (\mathbb{E}_2, 1) \arrow[d, "f"] \\
 & (\mathbb{S}_1, 1)
\end{tikzcd}$$

þar sem $i : \mathbb{S}_1 \hookrightarrow \mathbb{E}_2$ er ívarpið. En varpi varpar víxlnu örvariti á víxlið örvarit, svo að

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \pi_1(\mathbb{E}_2, 1) \arrow[d, "f_*"] \\
 & \pi_1(\mathbb{S}_1, 1)
\end{tikzcd}$$

er víxlið. En $\mathbb{E}_2$ er samdraganlegt, svo að $\pi_1(\mathbb{E}_2, 1) = 0$, þ.e. við höfum örvariti

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{S}_1}"] & 0 \arrow[d] \\
 & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

sem er fráleitt!

Af þessu sýnidæmi leiðir:

Setning 6.10 ***(Kyrrapunktssetning Bouwers í tveimur víddum)***: *Samfelld vörpun $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ hefur kyrrapunkt x, þ.e. $f(x) = x$.*

Sönnun
Annars fengist vörpun $g : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{S}_1$ þannig: Látum $g(x)$ vera skurðpunkt hálflínunnar frá $g(x)$ gegnum x við $\mathbb{S}_1$. Þá er ljóst að g er samfelld og $g(x) = x$ fyrir $x \in \mathbb{S}_1$.

Athugasemd
Höfum bara notað eftirfarandi: Til er varpi frá $F : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Gr}_*$ þ.a. $F(\mathbb{S}_1) \neq 0$ en $F(\mathbb{E}_2) = 0$.
Þægileg orðanotkun: Við köllum lokaðan feril $\alpha : [0,1] \to X$ þ.a. $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ **lykkju** í (X, p).

Látum $\pi : E \to X$ vera þekjuvörpun, α vera lykkju í (X, x) og $e \in \pi^{-1}[x]$. Látum $\tilde{\alpha}_e$ vera lyftingu á α þ.a. $\tilde{\alpha}_e(0) = e$. Þá er stakið

$$e \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_e(1)$$

vel skilgreint í $\pi^{-1}[x]$; og við fáum verkun grúpunnar $\pi_1(X, x)$ á trefjuna $\pi^{-1}[x]$ frá hægri

$$\pi^{-1}[x] \times \pi_1(X, x) \to \pi^{-1}[x], \quad e \mapsto e \cdot [\alpha]$$

þ.e.

$$e \cdot [1] = e \quad \text{og} \quad e([\alpha] \cdot [\beta]) = (e[\alpha])[\beta].$$

Ef E er ferilsamanhangandi þá er verkunin gegnvirk, þ.e. fyrir $e_1, e_2 \in \pi^{-1}[x]$ er til α þ.a. $e_1[\alpha] = e_2$.

Setning 6.11 *Ef $\pi : E \to X$ er þekjuvörpun, E er ferilsamanhangandi og $e \in E$, $x = \pi(e)$. Þá er*

$$\#\pi^{-1}[x] = (\pi_1(X, x) : \pi_*[\pi_1(E, e)])$$

þ.e. fjöldi staka í $\pi^{-1}[x]$ er fjöldi hjámengja hlutgrúpunnar $\pi_*[\pi(E, e)]$ í $\pi_1(X, x)$.

Sönnun
Athugum að $\pi_*[\pi_1(E, e)]$ er mengi allra $[\alpha]$, þar sem α er lykkja í (X, x) sem lyftist í lykkju í (E, e). Það þýðir að $e \cdot [\alpha] = e$ f.öll e úr $\pi^{-1}[x]$. Það þýðir að $\pi_*[\pi_1(E, e)]$ er stöðuleikagrúpa verkunarinnar; þ.e. grúpa allra staka í $\pi_1(X, x)$ sem halda öllum stökunum í $\pi^{-1}[x]$ kyrrum. Látum $e \in \pi^{-1}[x]$ vera fast; þá gefur vörpunin

$$\pi_1(X, x)/\pi_*[\pi_1(E, e)] \to \pi^{-1}[x], \quad \text{hjámengi}[\alpha] \mapsto e[\alpha]$$

(vinstra megin eru hjámengin!) Þá er vörpunin vel skilgreind og gagntæk.

Fylgisetning 6.7 *Ef X er* **einfaldlega smanhangandi** *þ.e. ferilsamanhangandi og $\pi_1(X, x) = 0$, og $\pi : X \to E$ er þekjuvörpun, þá er π grannmótun.*

Byrjum að skoða eina meginsetninguna um þekjurúm. Hún segir hvenær við getum lyft vörpunum.

Setning 6.12 ***(Lyftingarsetningin)*** *Látum $p : E \to X$ vera þekjuvörpun, e vera punkt í E og $x = p(e)$. Látum $f : Y \to X$ vera samfellda vörpun þar sem Y er samanhangandi og staðferilsamanhangandi og y vera punkt í Y þ.a. $f(y) = x$. Þá gildir að til er lyfting g á f m.t.t. p þ.a. $g(y) = e$ þ.þ.a.a. $f_*[\pi_1(Y, y)] \subset p_*[\pi_1(E, e)]$. Þá ákvarðast lyftingin ótvírætt.*

Athugasemd
Y er þá ferilsamanhangandi.

Sönnun
Ótvíræðni er þekkt. Ef svona lyfting g er til, $p \circ g = f$, þá er $f_*[\pi_1(Y, y)] = p_*[g_*[\pi_1(Y, y)]] \subset p_*[\pi_1(E, e)]$, svo að skilyrðið er nauðsynlegt. Gerum nú ráð fyrir að skilyrðinu sé fullnægt, $z \in Y$, α vera feril frá y til z. Ef g er til, þá er $g \circ \alpha$ lyfting á $f \circ \alpha$ og $g(z) = g \circ \alpha[1]$; við verðum því að skilgreina g þannig: Látum $\tilde{\alpha}$ vera lyftinguna á $f \circ \alpha$ þ.a. $\tilde{\alpha}(0) = e$ og setjum

$$g(z) := \tilde{\alpha}(1).$$

Sýnum að þetta sé vel skilgreint, þ.e.a.s. óháð valinu á α: Látum β vera annan feril frá y til z og $\tilde{\beta}$ vera lyftinguna á $f \circ \beta$ þ.a. $\tilde{\beta}(y) = e$. Þá er $\alpha * \beta^-$ lykkja í (Y, y) og $f_*([\alpha * \beta^-]) \in f_*[\pi_1(Y, y)] \subset p_*[\pi_1(E, e)]$, svo að til er lykkja γ í (E, e) þ.a. $p_*([\gamma]) f_*([\alpha * \beta^-])$. Það þýðir að lyftingin á $f \circ (\alpha * \beta^-)$ er lokaður ferill og getur þá ekki verið annað en $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^-$ þá verður að gilda $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.
Sýnum nú að þetta sé samfelld vörpun: Látum $z \in Y$, látum α vera feril frá y til z og V vera grennd um $g(z)$; get (með því að minnka V ef þörf er á) gert ráð fyrir að þkjuvörpunin p gefi af sér grannmótun $p_1 : V \to U := p[V]$. Veljum ferilsamanhangandi grennd W um z þ.a. $f[W] \subset V$. En þá er ljóst að

$$g|W = p_1^{-1} \circ (f|W)$$

því að fyrir t úr W má tengja z við t með ferli γ í W og þá er$\tilde{\alpha} * (p_1^{-1} \circ f \circ \gamma)$ lyfting á $f \circ (\tilde{\alpha} \circ \gamma)$. Því er $g|W$ samfellt.

Þetta gefur okkur nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir lyftingu.

Fylgisetning 6.8 *Látum $p_1 : E_1 \to X$, $p_2 : E_2 \to X$ vera samanhangandi þekjurúm yfir staðferilsamanhangandi rúmi X, og látum $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ vera þ.a. $p_1(e_2) = p_2(e_2) =: x$. Til er einsmótun $f : E_1 \to E_2$ yfir X þ.þ.a.a. grúpurnar $p_{1*}[\pi_1(E_1, e_1)]$ og $p_{2*}[\pi_1(E_2, e_2)]$ séu samoka hlutgrúpur í $\pi_1(X, x)$; til að einsmótunin f fullnægi $f(e_1) = e_2$ þarf $p_{1*}[\pi_1(E_1, e_1)] = p_{2*}[\pi_1(E_2, e_2)]$.*

Sönnun
Seinni fullyrðingin er bein afleiðing af síðustu setningu. Ef $f : E_1 \to E_2$ er einsmótun þekjurúma, $e := f(e_1)$. Látum α vera feril frá e_2 til e; þá er $\pi_1(E_2, e) \to \pi_1(E_2, e_2)$, $[\beta] \to [\alpha * \beta * \alpha^-]$ einsmótun frá $\pi_1(E_2, e) \to \pi_1(E_2, e_2)$, og fyrir $[\gamma] := [p \circ \alpha] \in \pi_1(X, x)$, svo að $p_{2*}[\pi_1(E_2, e)] \to p_{2*}[\pi_1(E_2, e_2)]$, $[\delta] \mapsto [\gamma \circ \delta \circ \gamma^-] = [\gamma] \cdot [\delta] \cdot [\gamma]^{-1}$ er innri sjálfmótun $\pi_1(X, x)$ sem tekur $p_{2*}[\pi_1(E_2, e_2)]$ á $p_{2*}[\pi_1(E_2, e)]$. Þannig að grúpurnar eru samoka í $\pi_1(X, x)$. Öfugt ef þær eru samoka með $[\gamma]$; lyftingu γ í feril sem endar í e, köllum lyftinguna α, og fáum punkt e_2, upphafspunkt γ, þ.a. $p_*[\pi_1(E_2, e)] = p_*[\pi_1(E_2, e_2)]$ og $f : E_1 \to E_2$ þekjuvörpun þ.a. $f(e_1) = e_2$.

Athugasemd
Fyrir þekjurúm $p : E \to X$ og x úr X höfðum við verkun $\pi_1(X, x)$ frá hægri á $p^{-1}[x]$. Fyrir lykkju α í (X, x) og e úr $\pi^{-1}[x]$ tökum við lyftingu $\tilde{\alpha}$ á α þ.a. $\tilde{\alpha}(0) = e$ og setjum

$$e \cdot [\alpha] := \tilde{\alpha}(1)$$

1. Ef $e_1 = e \cdot [\alpha]$ þá er

$$p_*[\pi_1(E, e_1)] = [\alpha]^{-1} p_*[\pi_1(E, e)] \cdot [\alpha].$$

2. Ef ψAut(E,p), þá er

$$\psi(e\cdot[\alpha])=\psi(e)\cdot[\alpha]$$

3. Höfum $e\cdot[\alpha]=e$ þ.þ.a.a. $[\alpha]\in p_*[\pi_1(E,e)]$.

Byrjum á að rifja upp skilgreiningu úr algebru:

Skilgreining 65 *Látum H vera hlutgrúpu í grúpu G. Hlutgrúpan*

$$N:=\{x\in G:\ xHx^{-1}=H\}$$

*er kölluð **normleikagrúpa** hlutgrúpunnar H í G.*

Athugasemd
Ef H er normleg þá er þetta allt G. Almennt er þetta stærsta hlutgrúpan N í G þ.a. H sé normleg í N.

Setning 6.13 *Látum X vera samanhangandi og staðferilsamanhangandi(sh&sfsh), látum $p:E\to X$ vera samanhangandi þekjurúm yfir X, $e\in E$ og $x:=p(e)$. Látum N vera normleikahlutgrúpu $p_*[\pi_1(E,e)]$ í $\pi_1(X,x)$. Þá er $Aut(E,p)\simeq N/p_*[\pi_1(E,e)]$. Sér í lagi ef E er einfaldlega samanhangandi, þá er $Aut(E,p)\simeq\pi_1(X,x)$.*

Sönnun
Fyrir $[\alpha]\in N$ og $e_1:=e\cdot[\alpha]$ er

$$p_*[\pi_1(E,e_1)]=[\alpha]^{-1}\cdot p_*[\pi_1(E,e)]\cdot[\alpha]=p_*[\pi_1(E,e)].$$

Skv. lyftingarsetningunni er til nákvæmlega ein þekjufærsla $\psi_{[\alpha]}$ í Aut(E,p) þ.a.

$$\psi_{[\alpha]}(e)=e\cdot[\alpha].$$

Fáum vel skilgreinda vörpun

$$\psi:N\to\mathrm{Aut}(E,p),\quad [\alpha]\mapsto\psi_{[\alpha]}.$$

1. ψ **er grúpumótun**: Látum $[\alpha],[\beta]\in N$ þá er

$$\begin{aligned}\psi_{[\alpha]\cdot[\beta]}(e)&=e\cdot([\alpha]\cdot[\beta])\\&=(e\cdot[\alpha])\cdot[\beta]\\&=\psi_{[\alpha]}(e)\cdot[\beta]\\&=\psi_{[\alpha]}(e\cdot[\beta])\\&=\psi_{[\alpha]}(\psi_{[\beta]}(e))\\&=\psi_{[\alpha]}\circ\psi_{[\beta]}(e)\end{aligned}$$

og þekjufærslur ákvarðast af gildi sínu í einum punkti, svo að

$$\psi_{[\alpha]\cdot[\beta]}=\psi_{[\alpha]}\circ\psi_{[\beta]}.$$

2. ψ **er átæk**: Þar sem E er ferilsamanhangandi verkar $\pi_1(X,x)$ gegnvirkt á $p^{-1}[X]$ svo að fyrir $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ er til α þ.a. $\varphi(e) = e[\alpha]$. En þá er $\varphi(e) = \psi_{[\alpha]}(e)$ og þá $\varphi = \psi_{[\alpha]}$.

3. Ker $\psi = \mathbf{p}_*[\pi_\mathbf{1}(\mathbf{E}, \mathbf{e})]$. Ef $\psi_{[\alpha]} = \mathrm{id}_E$, þá er $e \cdot [\alpha] = e$, þ.e. $\psi_{[\alpha]}(e) = e$, svo að ef $\tilde{\alpha}$ er lyfting á α þ.a. $\tilde{\alpha}(0) = e$, þá er $\tilde{\alpha}(1) = e$, þ.e. $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(E,e)$ og $[\alpha] = p_*([\tilde{\alpha}]) \in p_*[\pi_1(E,e)]$.

Athugasemd
Smá athugasemd af hverju $\psi_{[\alpha]}(e)\cdot[\beta] = \psi_{[\alpha]}(e\cdot[\beta])$. Ef $\tilde{\beta}$ er lyfting á β þ.a. $\tilde{\beta}(0) = e$, þá er $\tilde{\tilde{\beta}}\psi_{[\alpha]} \circ \tilde{\beta}$ lyfting á β þ.a. $\tilde{\tilde{\beta}}(0) = \psi_{[\alpha]}(e) = e \cdot [\alpha]$.

Fylgisetning 6.9 *Látum X vera sh&sfsh, $p : E \to X$ vera samanhangandi þekjurúm yfir X, $x \in X$. Þá er jafngilt:*

1. *$Aut(E,p)$ verkar gegnvirkt á $p^{-1}[x]$.*

2. *$p_*[\pi_1(E,e)]$ er normleg hlutgrúpa í $\pi_1(X,x)$ fyrir eitt(og þá öll) stök e í $\pi^{-1}[e]$.*

Skilgreining 66 *Þekjurúm $p : E \to X$ kallast normlegt(reglulegt, Galois) ef þessum skilyrðum er fullnægt (og E samanhangandi).*

Fylgisetning 6.10 *Ef X er sh&sfsh og $p : E \to X$ er Galois, þá er $Aut(E,p) \simeq \pi_1(X,e)/p_*[\pi_1(E,e)]$.*

Sýnidæmi 6.1.4 Fyrir $n \geq 2$ er $\mathbb{S}_n$ einfaldlega samanhangandi. (sjá kennslubók). Höfum þekjuvörpun

$$p : \mathbb{S}_n \to \mathbb{RP}_n$$

sem er tvíblaða(þ.e. allar trefjar hafa fjöldatölu 2). Þar með er $\mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n, p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Þar með er

$$\pi_1(\mathbb{RP}_n, x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

fyrir $n \geq 2$.

Athugasemd
$\mathbb{RP}_3$ er grannmóta snúningagrúpunni $SO(3)$. Ef við erum með feril sem fer í eina lykkju þá getum við ekki dregið hann saman í punkt, en ef hann fer í tvo hringi, þá er hægt að draga hann saman í einn puntk.

Setning 6.14 ***(Borsuk-Ulam)**: Látum $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}^2$ vera samfellda vörpun. Ef $n \geq 2$, þá er til x úr $\mathbb{S}_n$ þ.a.a $f(x) = f(-x)$.*

Sönnun
Annars má skilgreina samfellda vörpun: $\mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_1$, $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$. Höfum þá $g(-x) = -g(x)$. En þá fæst samfelld vörpun

$$h : \mathbb{RP}_n \to \mathbb{RP}_1$$

þ.a. örvaritið

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{S}_1 \arrow[d] \\ \mathbb{RP}_n \arrow[r, "h"] & \mathbb{RP}_1 \end{tikzcd}$$

sé víxlið. Veljum grunnpunkt x í $\mathbb{S}_n$ og fáum samsvarandi örvarit fyrir grunnpunkta í hinum rúmunum. Fáum örvarit fyrir undirstöðurgrúpurnar:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, "p_*"] \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "h_*"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

En þá er ljóst að $h_* = 0$, þannig að h hefur lyftingu

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{S}_1 \arrow[d] \\ \mathbb{RP}_n \arrow[r, "h"] \arrow[ur, "\tilde{h}"] & \mathbb{RP}_1 \end{tikzcd}$$

$\tilde{h}$ þ.a. $p \circ \tilde{h}$ og $\tilde{h}(q(x)) = g(x)$. En þá eru $\tilde{h} \circ q$ og g lyftingar á $h \circ q$ m.t.t. p með sama gildi í x, svo að $\tilde{h} \circ q = g$. En þá fæst $g(x) = \tilde{h}(q(x)) = \tilde{h}(q(-x)) = g(-x) = -g(x)$, sem er fráleitt, því $g(x) \neq 0$.

Setning 6.15 *Látum X vera sh&sfsh, $p : E \to X$ vera einfaldlega samanhangandi þekjurúm, $p(e) = x$. Látum $\psi : \pi_1(X, x) \to Aut(E, p)$ vera einsmótunina $[\alpha] \mapsto \psi_{[\alpha]}$. Fyrir sérhverja hlutgrúpu H í $\pi_1(X, x)$ látum við H' myndina af H í $Aut(E, p)$, þ.e. $H' = \psi[H]$, og E/H' vera brautarúmið fyrir verkun H' á E. Þá er til nákvæmlega ein samfelld vörpun, $p' : E/H' \to X$ þannig að örvaritið*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & E/H' \arrow[d, "p'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

sé víxlið, þar sem $q : E \to E/H'$ er náttúrlega ofanvarpið, og fyrir $e' := q(e)$ gildir

$$p'_*[\pi_1(E/H', e')] = H.$$

Ef $r : Y \to X$ er samanhangand þekjurúm, $r(y) = x$ og $H := r_*[\pi_1(Y, y)]$ þá er til nákvæmlega ein einsmótun $\varphi : Y \to E/H'$ þ.a. $\varphi(y) = e'$. Þannig fæst gagntæk samsvörun milli einsmótanarflokka af samanhangandi þekjurúmum með grunnpunkti $(Y, y) \to (X, x)$ og hlutgrúpna í $\pi_1(X, x)$.

Athugasemd
Einfaldlega samanhangandi þekjurúm er upphafshlutur í ríki allra þekjurúma. Setningin gefur okkur líka öll önnur þekjurúm.

Sönnun
Ef U er samanhangandi opið mengi í X þ.a. $E|U$ þá sé það látlaust, þá gera stökin í $\mathrm{Aut}(E, p)$ ekkert annað en stokka upp pönnukökunum, þ.e. ef $p^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} U_i$, þá gefur slík sjálfmótun af sér uppstokkun $\sigma : I \to I$ þ.a. hún varpar U_i grannmóta á $U_{\sigma(i)}$; svo að verkun grúpunnar H' á $p^{-1}[U]$ samsamar U_i við U_j ef stak úr H' varpar U_i á U_j. Svo að ljóst er að $p' : E/H' \to X$ verður þekjuvörpun. Ef α er lykkja í (X, x) og $\tilde{\alpha}$ er lyfting á α m.t.t. p þ.a. $\tilde{\alpha}(0) = e$, þá er $q \circ \tilde{\alpha}$ lyfting á α m.t.t. p' þ.a. $q \circ \tilde{\alpha}(0) = e'$. Við sjáum að eftirfarandi skilyrði eru jafngild:

1. $[\alpha] \in H$.
2. Til er φ úr H' þ.a. $\varphi(e) = \tilde{\alpha}(1)$.
3. $q \circ \tilde{\alpha}$ er lykkja í $(E/H', e')$

Þá er ljóst að

$$p'_*([q \circ \tilde{\alpha}]) = [\alpha]$$

og $[\alpha] \mapsto [q \circ \tilde{\alpha}]$ er andhverfa $\pi_1(E/H', e') \to H, \quad [\beta] \mapsto [q \circ \beta]$. Annað er afleiðing af lyftingarsetningunni.

Hvenær hefur X einfaldlega samanhangandi þekjurúm?

Skilgreining 67 *Við segjum að grannrúm X sé **hálfstaðeinfaldlega samanhangandi** ef sérhver punktur x hefur grennd U þ.a. $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ sé núllvörpunin, þar sem $i : U \hookrightarrow X$. M.ö.o. er sérhver lykkja í (U, x) núllsamtoga í X. Þetta er veikara en að vera með einfaldlega samanhangandi grennd, því samtogunin má fara út fyrir U.*

Setning 6.16 *Látum X vera sh&sfsh grannrúm. Rúmið X hefur ekki tómt einfaldlega samanhangandi þekjurúm þ.þ.a.a. það sé hálfstaðeinfaldlega samanhangandi.*

Athugasemd
Til að skoða dæmi er fínt að líta á Hawai eyrnalokka á wikipedia.

Sönnun
Ef X hefur einfaldlega samanhangandi þekjurúm $p : E \to X$ og $x \in X$, veljum $e \in p^{-1}[x]$ og grenndir V um e, U um x þ.a. p gefi af sér grannmótun $\tilde{p} : V \to U$. Látum $i : U \to X$, $j : V \to E$ vera ívörpin. Höfum víxlið örvarit

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V,e) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\tilde{p}_* \ \cong"] & \pi_1(E,e) = 0 \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(U,x) \arrow[r] & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

svo að $i_* = p_* \circ j_* \circ (\tilde{p}_*)^{-1} =$ núllvörpunin vegna $\pi_1(E,e) = 0$. Látum þá X vera samanhangandi, staðferilsamanhangandi og hálfstaðeinfaldlega samanhangandi. Veljum x úr X, látum E vera mengi allra ferilsamtogunarflokka af ferlunum sem $\alpha : I \to X$ þ.a. $\alpha(0) = x$. Fáum vörpun $p : E \to X$ sem varpar $\xi = [\alpha] \in E$ á $p(\xi) := \alpha(1)$.

Grannmynztur á E: Fyrir $\xi = [\alpha] \in E$ látum við U vera ferilsamanhangandi grennd um $y = p(\xi) = \alpha(1)$. Setjum

$$V(\xi, U) := \{[\alpha * \beta] : \beta \text{ er ferill frá } y \text{ i } U\}$$

Tökum mengin $V(\xi, U)$ sem grunn fyrir grannmynztur á E. Höfum $p[V(\xi, U)] = U$. Til að sjá að þetta sé grunnur: Ef $\zeta \in V(\xi, U) \cap V(\eta, U')$ þá er til ferilsamanhangandi grennd U'' um $p(\zeta)$ í $U \cap U'$. Þá er ljóst að $V(\zeta, U'') \subset V(\xi, U) \cap V(\eta, U)$. Ljóst er að p er samfelld og opin. Læt $y \in X$, finn grennd U um y sem er ferilsamanhangandi og þ.a. $i_* : \pi_1(U, y) \to \pi_1(X, y)$ sé núllvörpunin, þar sem $i : U \to X$ er ívarpið. Læt $p(\xi) = y$. Fullyrði að $p : V(\xi, U) \to U$ sé eintæk (og þar með er hún grannmótun, því að hún er átæk, samfelld og opin). Læt $\xi = [\alpha]$, læt β, γ vera ferla frá y til z í U. Þá er $[\beta * \gamma^-] = 0$ í $\pi_1(X, y)$ því i_* er núllvrpunin, sem jafngildir að β sé ferilsamtoga γ í X. Því er $[\alpha * \beta] = [\alpha * \gamma]$. Að lokum: Ef U er eins og að framan, α og α' eru ferlar frá x til y β, β' ferlar í U frá y til z og $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$ í X. Höfum $\beta \simeq \beta'$ í X, því er $[\alpha] = [\alpha * \beta * \beta^-] = [\alpha' * \beta' * (\beta')^-] = [\alpha']$.

6.2 Fyrirlestur 13.apríl

Reynir setti inn skjal um Seifert-van Kampen-setninguna, hér verður bætt við því sem Reynir bætir við í fyrirlestri.

Reynir segir að sönnunin í Munkres notar einungis tvö mengi í þakningunni á X, en frekar einfalt er að alhæfa þetta eins og Reynir bendir á.

Athugasemd
Gerum ráð fyrir að grúpurnar G_α séu allar víxlnar. Þá er hjámargfeldið $\coprod_{\alpha \in A} G_\alpha$ almennt ekki víxlið. Hins vegar hefur $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ hjámargfeldi $\bigoplus_{\alpha \in A} A_\alpha$ í víxlgrúpuríkinu **Ab**. Stökin í $\bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ eru fjölskyldur $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ þar sem $g_\alpha \in G_\alpha$ fyrir öll α

og $g_\alpha = 0_\alpha \in G_\alpha$ fyrir öll nema endanlega mörg α úr G_α. Náttúrlegu ofanvörpin eru $i_\alpha(x) := (g_\beta)_{\beta\in A}$ þar sem

$$g_\beta(x) := \begin{cases} 0_\beta & \text{ef} \quad \alpha \neq \beta \\ x & \text{ef} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Smá athugasemdir úr seinasta dæmatíma. Rifjum upp að net var fengið með því að byrja með strjált mengi og líma við það lokuð vil á endapunktunum. Samanhangandi net er einsmóta hringaklasa í **Hot**. Við sjáum það þannig: **Tré** er samanhangandi net sem hefur enga hringi, þ.e. runu af ólíkum leggjum sem mynda lokaðan veg í netinu, jafngilt er að netið sé einfaldlega samanhangandi. Hlutnet í neti er hlutrúm sem er sammengi einhverra leggja í netinu ásamt endapunktum þeirra. **Spannandi tré** í samanhangandi neti er hlutnet sem er tré og er ekki innihaldið í stærra hlutneti sem er tré; jafngilt er að allir hnútar netsins G séu í T.

Setning 6.17 *Alltaf er til spannandi tré í samanhangandi neti. Tré er samandraganlegt í einn punkt.*

Látum þá G vera samanhangandi net, finnum spannandi tré í G og drögum það saman í einn punkt. Allir leggir í G sem eru ekki í trénu verða lykkjur í þeim punkti þ.a. út kemur hringaklasi.

Látum $(X_i, x_i)_{i\in I}$ vera fjölskyldu af punktuðum grannrúmum; táknum með $\bigvee_{i\in I} X_i$ rúmið sem fæst úr $\bigcup_{i\in I}\{i\} \times X_i$ með því að samsama (i, X_i) í einn punkt f.öll $i \in I$. Hringaklasi er þá $\bigvee_{i\in I} \mathbb{S}_1$. Punktur í $\mathbb{S}_1$ hefur grennd sem er grannmóta opnu bili, veljum slíkt bil J_i um grunnpunktinn fyrir hvert i; þá er $U := \bigvee_{i\in I} J_i$ samandraganlegt opið mengi; og $U_i = U \cup i$-ti hringurinn er opið í $\bigvee_{i\in I} \mathbb{S}_1$ ig $U_i \cap U_j = U$ ef $i \neq j$. Seifert van-Kampent gefur að

$$\pi_1(\bigvee_{i\in I} \mathbb{S}_1, p) \cong \coprod_{i\in I} \mathbb{Z} = F(I).$$

Skoðum nú eina setningu sem spurt var um í seinasta dæmatím:

Setning 6.18 *Sérhver grúpa er undirstöðugrúpa grannrúms.*

Sönnun
Látum G vera grúpu, finnum mengi A og átæka grúpumótun $\varphi : F(A) \to G$ og látum $B \subset F(A)$ vera þ.a. minnsta normlega hlutgrúpa sem inniheldur B sé Kerφ. Látum $X = \bigvee_{a\in A} \mathbb{S}_1$; fyrir hringinn $\mathbb{S}_1$ númer a látum við α_a vera ferilinn sem fæst með því að fara einn hring kringum $\mathbb{S}_1$ númer a frá grunnpunkti. Látum nú $b \in B$ og skrifum

$$b = a_1^{\varepsilon_1} \cdots b_m^{\varepsilon_m}.$$

þar sem $\varepsilon_j \in \{1, -1\}$; látum $\varphi_b : \mathbb{S}_1 \to \bigvee_{a\in A} \mathbb{S}_1$ vera vörpunina sem ákvarðast af $\varphi_b \circ \alpha = \alpha_{a_1}^{\varepsilon_1} \cdots \alpha_{a_m}^{\varepsilon_m}$ þar sem α er stikun á $\mathbb{S}_1$. Nú lími ég $\mathbb{E}_2$ við $X = \bigvee_{a\in A} \mathbb{S}_1$ með því að líta á $\mathbb{S}_1 = \partial\mathbb{E}_2$ og líma $z \in \mathbb{S}_1 \subset \mathbb{E}_2$ við $\varphi_b(z)$. Geri þetta fyrir öll b í B. Þá verður $\alpha_{a_1}^{\varepsilon_1} \cdots \alpha_{a_m}^{\varepsilon_m}$ samandraganlegt í rúminu $\hat{X}$ sem út kemur og

$$\pi_1(\hat{X}, p) = F(A)/\langle B\rangle = G,$$

$\langle B\rangle$ = minnsta normlega hlutgrúpan sem inniheldur B.

Sýnidæmi 6.2.1 T.d. gildir að fyrir tveggja staka grúpu höfum við grannrúmin $\mathbb{P}_n\mathbb{R}$ fyrir $n \geq 2$.

Látum X vera *Hawai-eyrnalokkinn* sem er sammengi runu $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af hringjum sem snertast í sama punkti í $\mathbb{R}^2$ þ.a. geisli $(C_k) \to 0$ þegar $k \to +\infty$. C_k er inndragi af X: Vörpum öllum punktum ekki á C_k á p. Höfum grúpumótun $\gamma_k : \pi_1(X, p) \to \pi_1(C_k, p) \cong \mathbb{Z}$ og þar með grúpumótun $\pi_1(X, p) \to \prod_{k\in\mathbb{N}} \pi_1(C_k, p)$, $\alpha \mapsto (\gamma_k(\alpha))_{k\in\mathbb{N}} = \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$. Þessi vörpun er átæk: Gefin einhver runa $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af heilum tölum, þá búum við til $\alpha : [0, 1] \to X$ með því að láta

$$\alpha|[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{i+k}}]$$

vera feril sem vefst n_k-sinnum kringum C_k f.öll $k \in \mathbb{N}$. Vörpunin α er augljóslega samfelld á $[0, 1[$; en um p inniheldur alla nema endanlega marga af hringjunum C_k, svo að α er líka samfelld í 1. Sjáum að grúpan $\pi_1(X, p)$ er **óteljanleg** vegna þess að $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ er óteljanlegt mengi. Hins vegar gildir ef A er teljanlegt, þá er $F(A)$ teljanleg, svo að undirstöðugrúpa hringaklasa með teljanlega mörgum hringjum er teljanleg.