| | | |
|---|---|---|
| **Háskóli Íslands** | **09.10.16 Línuleg algebra og tölfræði** | **Raunvísindadeild** |
| **Föstuudagur** | **12. desember 2003** | **kl 13:30-16:30** |
| **Lausnir** | | |

Eftirfarandi fylki $\mathbf{X}$ og vigur $\mathbf{y}$ verða notuð í dæmum 1-3:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**1. (10)** Finnið þann vigur, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sem lágmarkar $||\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}||^2$.

**Lausn:** Hér er tiltölulega auðvelt að leysa normaljöfnurnar, þ.e. reikna fyrst

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ og } \quad \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

sem þýðir að normaljöfnurnar, $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$ eru

$$\begin{aligned} 4\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 &= 10 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 &= 5 \\ 4\beta_1 + 2\beta_2 + 5\beta_3 &= 15 \end{aligned}$$

og það er ekkert stórmál að leysa þessar jöfnur til að fá $\beta_1 = -5/2$, $\beta_2 = 0$ og $\beta_3 = 5$, þ.e. $\boldsymbol{\beta} = (-5/2, 0, 5)'$. + **2. (10)** Gefið dálkvigrum fylkisins $\mathbf{X}$ nöfnin $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ og finnið hornréttan einingargrunn fyrir spann þeirra vigra, $V = sp(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

**Lausn:** Hér er $\mathbf{u} = (1,1,1,1,0)'$ svo $||\mathbf{u}|| = \sqrt{4} = 2$ og því er fyrsti einingarvigurinn $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}/||\mathbf{u}|| = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 0)'$.

Næst er $\mathbf{v} = (0,1,1,0,0)'$ og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 = (0,1,1,0,0)' \cdot (1/2,1/2,1/2,1/2,0)' = 1$, svo ofanvarp $v$ á $v_1$ er $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 = (1/2,1/2,1/2,1/2,0)'$. Þar með fæst leifin, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{w}_2 = (0,1,1,0,0)' - (1/2,1/2,1/2,1/2,0)' = (1/2,-1/2,-1/2,1/2,0)'$. Þessi leif hefur lengdina 1 svo næsti einingavigur er $\mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_2/||\mathbf{r}_2|| = \mathbf{r}_2 = (1/2,-1/2,-1/2,1/2,0)'$.

Að lokum er $\mathbf{w} = (1,1,1,1,1)'$ þannig að innfeldin verða $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 = 1$ og $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ þannig að ofanvarp $\mathbf{w}$ á span vigranna $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er gefið með $\mathbf{w}_3 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = (1,1,1,1,0)'$ og leifin verður þá $\mathbf{r} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_3 = (1,1,1,1,1)' - (1,1,1,1,0)' = (0,0,0,0,1)'$ sem hefur lengdina einn og því fæst að síðasti einingavigurinn er $\mathbf{v}_3 = (0,0,0,0,1)'$.

**3.** **(5)** Finnið þann vigur, $\hat{\mathbf{y}}$, sem er næstur $\mathbf{y}$ meðal allra vigra í $V$.

**Lausn:** Hér er hægt að nota niðurstöður úr hvort sem er dæmi 1 eða 2. T.d. fæst með dæmi 1 að $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} = \hat{\boldsymbol{\beta}} = (1/2)(5,5,5,5,10)'$.

**4.** **(10)** Finnið eigingildi fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Lausn:** Finna þarf þau gildi á $\lambda$ sem uppfylla $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$, en hér er

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = | & \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} | \\ &= (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot 1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) \end{aligned}$$

sem er núll þá og því aðeins að annar hvor liðurinn í margfeldinu er núll, þ.e. þegar annað hvort $\lambda = 1$ eða $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$ en seinni jafnan hefur lausnirnar $2 \pm \sqrt{2}$.

Eigingildin eru því 1, $2-\sqrt{2}$ og $2+\sqrt{2}$, eða 1, 3.14142 og 0.5858.

**5.** **(15)** Teiknið mynd og nýtið hana til að finna þau gildi, $x$ og $y$, sem hámarka $z = y - x$ með tilliti til

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2 \\ x &\leq 2 \\ 4x + 3y &\leq 12 \\ 5x - 3y &\geq -3 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Munið að rökstyðja svarið.

**Lausn:** Hér þarf að teikna mynd til að lýsa svæðinu. Svæðið afmarkast af nákvæmlega fjórum punktum, (0,1), (2,0), (2, 4/3) og (1,8/3). Einfalt er að prófa bara þessa punkta en þá kemur í ljós að hæsta mögulega gildið er $z = 5/3$ í $(x,y) = (1, 8/3)$.

**6.** **(10)** Gerðar voru mælingar á hæð trjáa ($y_{ij}$) á 2 mismunandi stöðum ($i$) á landinu, 3 mælingar ($j$) á hverjum stað. Táknið staðaráhrif sem frávik frá meðaltali ($\mu$) með $\alpha_i$ að viðbættum áhrifum vegna hitastigs (mælt sem "gráðudagar"), $x_{ij}$.

Setjið nákvæmlega fram á fylkjaformi líkan fyrir samvikagreiningu þar sem hæð trjáa er spáð með staðaráhrifum og hitaáhrifum. Notið tölur eða tákn eftir því sem við á til að sýna öll stök í öllum vigrum eða fylkjum.

**Lausn:** Hér þarf að skrifa upp sjálft fylkið, stak fyrir stak... Þetta er nánast eins og tilsvarandi dæmi sem var tekið í fyrirlestrum.

**7. (20)** Mælingar eru gerðar á einstaklingum sem hafa orðið fyrir áfalli. Mælingar fyrir hvern einstakling eru teknar saman í staðlaða heildareinkunn fyrir ásigkomulag og mynda mælikvarða á úthald eða þol. Úrtak 5 slíkra einstaklinga gaf mælingarnar 85, 94, 97, 89, 101.

(a) Heilbrigður einstaklingur fær að meðaltali einkunnina 100, sem er viðmiðun í kerfinu. Er hægt að fullyrða að áfallið leiði til minnkunar á úthaldi?

(b) Eftir 5 mánaða endurhæfingu voru sömu einstaklingar mældir aftur og fengust þá niðurstöðurnar 84, 96, 102, 88, 105. Hefur endurhæfingin haft áhrif?

(c) Stærri könnun meðal 49 einstaklinga leiddi í ljós að 38 fengu hærri einkunn eftir endurhæfingu en fyrir. Er þetta marktæk breyting?

**Lausn:** (a) er t-próf (athuga þó og muna að lýsa forsendum þess að mega nota t-próf). (b) Hér koma þá mælipör sem eru ekki óháðar mælingar og eðlilegt að nota parað t-próf (alltaf muna að skrifa niður núlltilgátur). (c) Hér eru ekki gefnar tölur nema um hve margir hækkuðu og því þarf að prófa breytingu á hlutfalli, þ.e. prófa $H_0 : p = 1/2$ gegn almennri gagntilgátu o.s.frv.

**8. (10)** Teiknið fall sem vex línulega frá $f(0) = 0$ upp í $f(1) = k$ og minnkar síðan línulega úr $f(1) = k$ í $f(3) = 0$. Utan bilsins $(0, 4)$ er $f(x) = 0$.

(a) Hvað þarf $k$ að vera til að $f$ sé þéttifall?
(b) Ef $X$ er hending með þéttifallið $f$, hvað er þá $P[X \geq 2]$?

**Lausn:** $k$ þarf að vera þannig að flatarmálið undir línunni sé einn. (b) Hér þarf að reikna flatarmálið undir ferlinum, fyrir ofan 2, sem má gera með því að reikna heildið en það er alveg óþarfi – þetta er auglóst ef myndin er rétt teiknuð því þá er hér um einfalt flatarmál þríhyrnings að ræða.

**9. (10)** Á kennsluvefnum voru tekin út fyrsta og síðasta svar hvers nemanda við spurningu úr hverjum fyrirlestri. Fyrir hverja spurningu fæst svarið 0 eða 1. Nemendur fengu að meðaltali einkunnina 0.53 við fyrstu spurningu í hverjum fyrirlestri en 0.77 fyrir þá síðustu. Meðaltölin eru byggð á 1539 svörum, hvort fyrir sig.

(a) Prófið hvort munurinn er marktækur og túlkið niðurstöðuna?

(b) Hverjar eru forsendur prófsins og standast þær?

**Lausn:** Í (a) er engra kosta völ nema nota próf á mismun hlutfalla. Augljóst er að forsenda þess prófs um að mælingar séu óháðar standast ekki því þetta eru sömu nemendurnir. Til að fá fullt fyrir þetta dæmi þarf að túlka niðurstöðuna. Hér er marktækur munur þannig að einkunn er hærri fyrir síðustu spurningu en þá fyrstu. Svo virðist því sem nemendur læri af því að nota vefinn, en það er ekki fyrirfram ljóst hvort um skilning sé að ræða eða utanaðbókarlærdóm.

**10. (30)** Kanna skal hvernig mælingar í vigrinum **y** tengist stýribreytum í vigrunum **x**, **w** og **z**. Sérstakur áhugi er á að kanna tengsl **y** við allar breyturnar og að kanna hvort lýsa megi **y** með **x** einu og sér.

Til að prófa þetta eru gefnar tvær R skiparnir, annars vegar
**fmF<-lm(y~w+z+x)**
til að meta $y_i = \alpha + \beta w_i + \gamma z_i + \delta x_i + \epsilon_i$ (stórt líkan) og hins vegar
**fmR<-lm(y~x)**
til að meta $y_i = \alpha + \delta x_i + \epsilon_i$ (minna líkan). Gert er ráð fyrir óháðum normaldreifðum frávikum.

Líkönin eru síðan greind með nokkrum R skipunum, eins og fram kemur á næstu síðu.

Munið að rökstyðja svörin með tilvísun í tiltekna(r) tölu(r) í úttakinu.

**Athugasemd:** Þetta dæmi er hefðbundið síðasta dæmi í línulegri algebru og tölfræði. Hér er beðið um túlkun niðurstaðna úr tölfræðipakka og er í raun það sama og hefur verið gert í verkefnum í námskeiðinu. Tilgangurinn er sá að kanna, hvort nemendur kunni að lesa og túlka niðurstöður. Lang-algengasta vandamálið er að ekki er gefinn rökstuðningur fyrir svari, t.d. í (a)-lið að segja bara "já" **en fyrir það fæst ekkert stig - sama hvort svarið er rétt eða rangt**. Öll svör þarf að styðja með tilvísun í tölu(r) í úttakinu fyrir neðan.

**(a)** Er nauðsynlegt að hafa $x$ í lokalíkaninu?

**Lausn:** Já því $x$ er marktækt í lokalíkaninu (P=0.0008407<0.01)

**(b)** Er nauðsynlegt að hafa $z$ í lokalíkaninu?

**Lausn:** Freistandi að segja: Já (P=0.0001364), en það er rangt. Rétt svar er: Nei því P=0.2316384.

**(c)** Hvert er matið á $\delta$ í stóra líkaninu?

**Lausn:** 0.9825

**(d)** Hvað er $MSE$ í stóra líkaninu?

**Lausn:** MSE=SSE/df = 54.056/21=...

**(e)** Hvað er $SSTOT$?

**Lausn:** 3269.6+55.7+39.0+54.1

**(f)** Hvert er óvissumatið á $\gamma$ (þ.e. $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}}$)?

**Lausn:** 1.1569

**(g)** Er nóg að spá $y$ með $x$ eingöngu?

**Lausn:** Nei því stuðullinn við $x$ er marktækur í lokalíkaninu (P= 1.27e-07)

**(h)** Hvað er $SSE$ í litla líkaninu?

**Lausn:** 214.016

> **anova(fmF)**

```
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)    
w          1 3269.6  3269.6 1270.204 < 2.2e-16 ***
z          1   55.7    55.7   21.654 0.0001364 ***
x          1   39.0    39.0   15.148 0.0008407 ***
Residuals 21   54.1     2.6                       
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

> **anova(fmR,fmF)**

```
Analysis of Variance Table

Model 1: y ~ x
Model 2: y ~ w + z + x
  Res.Df     RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)    
1     23 214.016                                  
2     21  54.056  2   159.960 31.071 5.311e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

> **drop1(fmF,test="F")**

```
Single term deletions

Model:
y ~ w + z + x
       Df Sum of Sq     RSS     AIC F value     Pr(F)    
<none>               54.056  27.279                      
w       1   156.054 210.110  59.219 60.6250 1.268e-07 ***
z       1     3.906  57.962  27.023  1.5173 0.2316384    
x       1    38.993  93.048  38.856 15.1481 0.0008407 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

> **summary(fmF)**

```
Call:
lm(formula = y ~ w + z + x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.4341 -1.4062  0.2688  1.1839  2.6240

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   4.3381     1.6857   2.574  0.01771 *
w             6.8344     0.8778   7.786 1.27e-07 ***
z            -1.4251     1.1569  -1.232  0.23164
x             0.9825     0.2524   3.892  0.00084 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.604 on 21 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9842,     Adjusted R-squared: 0.9819
F-statistic: 435.7 on 3 and 21 DF,  p-value: < 2.2e-16
```