

| | | | |
|---|---|--|------------------|
| Háskóli Íslands | 09.10.16 Línuleg algebra og tölfræði | | Raunvísindadeild |
| Laugardagur | 17. ágúst 2002 | | kl 9-12 |
| Leyfileg hjálpargögn: Dauðir hlutir. | Athugið að GSM símar eru bannaðir á prófstað og tengingar við Internetið einnig. | Vægi dæma er gefið í svigum. Athugið að 100 stig teljast full lausn, en alls eru stigin fleiri. | |

Notið 5% marktækniröfu nema annað sé tekið fram. Munið að taka skýrt fram núlltilgátur og gagntilgátur þar sem það á við.

Eftirfarandi fylki \mathbf{X} og vigur \mathbf{y} verða notuð í dæmum 1 og 2:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (10) Ritið fylkið \mathbf{X} sem safn dálkvigra, $\mathbf{X} = [\mathbf{a}_1 : \mathbf{a}_2 : \mathbf{a}_3]$ og finnið hornréttan einingargrunn, fyrir $V = sp\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.
- (10) Setjið upp og leysið normaljöfnur verkefnisins $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$.
- (10) Reiknið eigingildi fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (15) Teiknið mynd og nýtið hana til að finna þau gildi, x og y , sem lágmarka $z = 2x + y$ með tilliti til

$$\begin{aligned} x + y &\leq 4 \\ x + 2y &\geq 4 \\ 3x + y &\geq 3 \\ x - 2y &\leq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

- (20) Neytendur sem kaupa vöru nokkra í tiltekinni búð gruna kaupmanninn um græsku, en hann fullyrðir að innan við 4% seldra vara séu gallaðar.

(a) Tiltekinn einstaklingur kemur tvisvar, kaupir eitt eintak af vörunni í hvort skipti og bæði eintökin eru gölluð. Hverjar eru líkurnar á svo slakri útkomu ef tilviljun ræður og kaupmaðurinn hefur rétt fyrir sér?

(b) Neytendasamtökin gera könnun og finna alls 8 skemmdar vörur af 100. Er þetta ósættanlegt hlutfall?

6. (15) Eftirfarandi tafla gefur niðurstöður mælinga, y_{ij} á hitastigi á mismunandi stöðum á landinu. Tvær mælingar voru gerðar á hverjum stað.

| | | | | | | | |
|--------------|----------|---|---|---|---|---|---|
| Staður | i | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| Endurtekning | j | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| Mæling | y_{ij} | 2 | 3 | 5 | 5 | 6 | 5 |

Er hitastig breytilegt eftir staðsetningu?

7. (35) Niðurstöður (y) tiltekinnar prófana á sjúklingum voru fengnar með þremur mælitækjum ($m = 1, 2, 3$) og eftir mismunandi marga daga (x) í meðferð. Prófanirnar felast í því að mæla eftirstöðvar tiltekinnar efnis. Þær eru gerðar á log-kvarða og því er reiknað með að línulegt samband gildi við tíma á þeim kvarða, þ.e. milli y og x .

| | | | | | | | | | |
|-----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| y | 8 | 4 | 21 | 10 | 12 | 17 | 28 | 31 | 36 |
| m | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |

Þessi gögn voru sett inn í tölfræðipakka til að kanna, hvaða atriði hafa áhrif á mælingarnar. Skilgreint var líkanið $y = \alpha_m + \beta_m x + e$.

Notað var SAS-forritið:

```
proc glm;
  classes m;
  model y=m m*x;
```

sem gefur eftirfarandi niðurstöður:

The GLM Procedure

Dependent Variable: y

| Source | DF | Sum of Squares | Mean Square | F Value | Pr > F |
|-----------------|----|----------------|-------------|---------|--------|
| Model | 5 | 920.5555556 | 184.1111111 | 7.30 | 0.0663 |
| Error | 3 | 75.6666667 | 25.2222222 | | |
| Corrected Total | 8 | 996.2222222 | | | |

| | R-Square | Coeff Var | Root MSE | y Mean |
|--|----------|-----------|----------|----------|
| | 0.924046 | 27.06560 | 5.022173 | 18.55556 |

| Source | DF | Type I SS | Mean Square | F Value | Pr > F |
|--------|----|-------------|-------------|---------|--------|
| m | 2 | 779.5555556 | 389.7777778 | 15.45 | 0.0263 |
| x*m | 3 | 141.0000000 | 47.0000000 | 1.86 | 0.3110 |

| Source | DF | Type III SS | Mean Square | F Value | Pr > F |
|--------|----|-------------|-------------|---------|--------|
| m | 2 | 147.8412698 | 73.9206349 | 2.93 | 0.1970 |
| x*m | 3 | 141.0000000 | 47.0000000 | 1.86 | 0.3110 |

(frh.)

Skrifa má líkanið þannig: $Y_i \sim n(\alpha + \beta_m + \gamma_m x_i, \sigma^2)$.

- (a) Hvað útskýrir líkanið mikinn hluta breytileika gagnanna?
- (b) Hvað myndi líkanið $Y_i \sim n(\alpha + \beta_m, \sigma^2)$ útskýra mikinn breytileika?
- (c) Ef dagarnir hefðu ekki verið skráðir, myndi þá vera talinn munur á mælitækjum?
- (d) Hvert er matið á staðalfrávik gagnanna (y -mælinganna)?
- (e) Hvert yrði metið staðalfrávik gagnanna ef ekkert líkan er notað?
- (f) Hvers vegna gefur SAS ekki sjálfkrafa gildi stikanna, α , β_m og γ_m ?

Munið að rökstyðja öll svörin með tilvísunum í tölur og uppsetningu á líkönum og núlltilgátum. Athugið að finna má allar tölur, sem leggja þarf til grundvallar, í útkomunnu úr SAS keyrslunni, en að sjálfsögðu má einnig reikna þær út töflunni.