

Háskóli Íslands	09.10.16 Línuleg algebra og tölfræði	Raunvísindadeild
Priðjuudagur	17. desember 2002	kl 9-12.
Leyfileg hjálpargögn: Dauðir hlutir.	Athugið að GSM símar eru bannaðir á prófstað og tengingar við Internetið einnig.	Vægi dæma er gefið: 100 stig teljast full lausn, en alls eru stigin fleiri.

Notið 5% marktækniröfu nema annað sé tekið fram. Munið að taka skýrt fram núlltilgátur og gagntilgátur þar sem það á við.

1. (20) Vigrarnir \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} og \mathbf{y} eru skilgreindir þannig:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Látið vigurrúmið V vera $V = sp\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Finnið vigra, $\hat{\mathbf{y}}$ og $\hat{\mathbf{e}}$ þannig að $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{e}}$ með $\hat{\mathbf{y}} \in V$ og $\hat{\mathbf{y}} \perp V$.

2. (15) Finnið eigingildi og eiginvigra fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (15) Teiknið mynd og nýtið hana til að finna þau gildi, x og y , sem hámarka $z = x + 3y$ með tilliti til

$$\begin{aligned} -2x + y &\leq 1 \\ x + y &\leq 6 \\ -x + y &\geq -4 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

4. (20) Á kennsluvef nokkrum eru krossaspurningar sem valdar eru af handa-hófi en nemendur geta pantað slíkar spurningar eins oft og þeim sýnist. Þrjár svarmöguleikar eru gefnir við hverja spurningu en aðeins einn er réttur. Svára þarf samtals 8 spurningum réttum úr hverjum fyrirlestri til að ná fullum skilum. Einkunn er gefin fyrir síðustu fjögur svör úr hverjum fyrirlestri.

(a) Nemandi A svarar með því að giska á svar við 10 spurningum í röð. Hverjar eru líkurnar á að nemandi A nái fullum skilum úr tilteknum fyrirlestri?

(b) Nemandi B getur hins vegar alltaf útilokað eitt svar, giskar síðan á annað hinna tveggja og gerir þetta alltaf 16 sinnum. Hverjar eru líkurnar á að nemandi B nái 7.5 í einkunn úr tilteknum fyrirlestri?

(c) Nemandi C nær 8 réttum spurningum af 9 í einum fyrirlestri og 16 réttum af 27 í öðrum. Er marktækur munur á þyngd spurninganna?

(d) Nemandi D nær 25 réttum svörum í 58 tilraunum. Hefur nemandinn giskað á svörin? (prófið formlega)

5. (15) Eftirfarandi tafla gefur niðurstöður mælinga, y_i fyrir mismunandi hitastig (x_i).

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	2	4	0	2	4
y_i	1	3	6	2	5	5

(a) Skrifðu niður formlegt líkan til að lýsa línulegu sambandi með mælingarnar sem fall af hitastigi. Metið stuðla í líkaninu.

(b) Setjið formlega fram og prófið núlltilgátu um að hallastuðullinn í líkaninu sé núll.

6. (15) Gerðar voru mælingar (y_{ij} á 4 mismunandi stöðum (i) á landinu. Niðurstöður eru teknar saman í eftirfarandi töflu.

Svæði	1	2	3	4
n_i	5	3	4	7
$\sum_j y_{ij}$	27	18	25	37
$\sum_j y_{ij}^2$	157	116	193	225

(a) Kanna skal hvort svæðamunurinn sé marktækur. Setjið fram núlltilgátu og gagntilgátu og gerið grein fyrir forsendum prófsins.

(b) Gerið eins þáttar fervikagreiningu og kannið þannig hvort svæðamunurinn sé marktækur.

7. (30) Gerð var samvikagreining með “proc glm” í SAS til að meta samhengi mælingarinnar y við óháðu breytuna x og þáttinn u , sem táknar reit.

Notað var SAS-forritið:

```
proc glm;  
  model y=x u u*x/solution;
```

og eru útkomur sýndar á meðfylgjandi útprentun.

Munið að rökstyðja öll svörin með tilvísunum í tölur og uppsetningu á líkönunum og núlltilgátum.

Skrifa má líkanið þannig: $Y_{iu} \sim n(\alpha + \beta x + \gamma_u + \delta_u x_{iu}, \sigma^2)$.

- (a) Hvert er matið á σ^2 ?
- (b) Hver yrði kvaðratsumma fráviks í líkaninu $y = \alpha + \beta x$?
- (c) Hvað eru margir mismunandi reitir?
- (d) Hvert er spágildið, \hat{y} , við $x = 1$ á reit 315?
- (e) Ef ákveðið yrði að nota annað líkan, $y_{iu} = \alpha + \beta x + \gamma_u + e_{iu}$, hvernig verður þá núlltilgátan um að áhrif reita séu engin og tilsvareandi gagnþilgáta?
- (f) Má sleppa reitum alveg úr líkaninu?
- (g) Hvað er $\|y - \hat{y}\|^2$?
- (h) Útskýrir líkanið marktækan hluta breytileikans?
- (i) Hvað er $\hat{\sigma}_\beta$?
- (j) Grunnlíkanið tilsvavar nokkrum beinum línunum. Hvernig eru þær breytilegar í grunnlíkaninu og hvernig má einfalda þær samkvæmt niðurstöðum keyrslunnar?

Dependent Variable: y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	7	185.2403017	26.4629002	21.34	0.0051
Error	4	4.9606447	1.2401612		
Corrected Total	11	190.2009464			

R-Square Coeff Var Root MSE y Mean
 0.973919 11.42592 1.113625 9.746484

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
x	1	147.7943938	147.7943938	119.17	0.0004
r	3	35.0843893	11.6947964	9.43	0.0276
x*r	3	2.3615186	0.7871729	0.63	0.6307

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
x	1	103.7867026	103.7867026	83.69	0.0008
r	3	10.6017725	3.5339242	2.85	0.1689
x*r	3	2.3615186	0.7871729	0.63	0.6307

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	7.760418000 B	1.70109066	4.56	0.0103
x	0.795015000 B	0.19686299	4.04	0.0156
r 264	-6.028923500 B	2.16847361	-2.78	0.0498
r 315	-4.022953750 B	2.06784245	-1.95	0.1236
r 325	-5.360764000 B	2.28168650	-2.35	0.0786
r 720	0.000000000 B	.	.	.
x*r 264	0.317309250 B	0.27840631	1.14	0.3180
x*r 315	-0.025640250 B	0.27840631	-0.09	0.9310
x*r 325	0.130123000 B	0.27840631	0.47	0.6645
x*r 720	0.000000000 B	.	.	.

NOTE: The X'X matrix has been found to be singular, and a generalized inverse was used to solve the normal equations. Terms whose estimates are followed by the letter 'B' are not uniquely estimable.