| | | |
|---|---|---|
| **Háskóli Íslands** | **09.10.16 Línuleg algebra og tölfræði** | **Raunvísindadeild** |
| **Laugardagur** | **16. ágúst 2003** | **kl 9-12.** |
| **Leyfileg hjálpargögn**: Dauðir hlutir. | **Athugið** að GSM símar eru bannaðir á prófstað og tengingar við Internetið einnig. | **Vægi** dæma er gefið: 100 stig teljast full lausn, en alls eru stigin fleiri. |

Notið 5% marktæknikröfu nema annað sé tekið fram. Munið að taka skýrt fram núlltilgátur og gagntilgátur þar sem það á við.

Eftirfarandi upplýsingar eru notaðar í dæmum 1-2. Vigrarnir $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ og $\mathbf{y}$ eru skilgreindir þannig:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Látið ennfremur $\mathbf{X} = \left[\mathbf{u} \vdots \mathbf{v} \vdots \mathbf{w}\right]$ og skilgreinið vigurrúmið $V = sp\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

**1. (10)** Leysið normaljöfnur aðhvarfgreiningarverkefnisins $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$.

**2. (10)** Finnið vigra, $\hat{\mathbf{y}}$ og $\hat{\mathbf{e}}$ þannig að $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{e}}$ með $\hat{\mathbf{y}} \in V$ og $\hat{\mathbf{y}} \perp V$.

**3. (15)** gefið er eftirfarandi fylgnistuðlafylki.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Finnið fyrsta meginþáttinn.

(b) Hvað útskýrir meginþátturinn mikinn “breytileika” í fylgnistuðlafylkinu?

**4. (15)** Teiknið mynd og nýtið hana til að finna þau gildi, $x$ og $y$, sem hámarka $z = 2x - y$ með tilliti til

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 10 \\ 4x + 5y &\geq 20 \\ y &\geq 2 \\ x &\leq 4 \\ x - 2y &\geq -6 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

**5. (15)** Á kennsluvef nokkrum eru krossaspurningar sem valdar eru af handahófi en nemendur geta pantað slíkar spurningar eins oft og þeim sýnist. Fjórir svarmöguleikar eru gefnir við hverja spurningu en aðeins einn er réttur. Einkunn er gefin fyrir síðustu átta svör úr hverjum fyrirlestri.

(a) Nemandi A svarar með því að giska á svar við átta spurningum í röð. Hverjar eru líkurnar á að nemandi A fái allt rétt í tilteknum fyrirlestri?

(b) Nemandi B veit aðeins meira og getur hins vegar alltaf útilokað eitt svar en giskar síðan á eitt hinna þriggja og gerir þetta alltaf átta sinnum. Hverjar eru líkurnar á að nemandi B nái a.m.k. 7.5 í einkunn úr tilteknum fyrirlestri?

(c) Ef Jón fær 7.5 en Kristín fær 8.75 í tilteknum fyrirlestri, getur Kristín þá fullyrt að hún kunni efnið betur?

(d) Ef munurinn á Jóni og Kristínu er ekki marktækur í tilteknum fyrirlestri, getur Jón þá fullyrt að það sé enginn munur á kunnáttu þeirra í því efni sem um ræðir?

**6. (15)** Eftirfarandi tafla gefur niðurstöður mælinga, $y_i$ fyrir mismunandi hitastig ($x_i$) í hitaskáp.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | 5 |

Er samband milli hitastigsins og mælinganna?

**7. (10)** Gerðar voru mælingar á hæð trjáa ($y_{ij}$ á 4 mismunandi stöðum ($i$) á landinu, 3 mælingar ($j$) á hverjum stað. Táknið staðaráhrif sem frávik frá meðaltali ($\mu$) með $\alpha_i$.

Setjið nákvæmlega fram á fylkjaformi líkanið sem tilsvarar eins þáttar fervikagreiningu fyrir þessa tilraun. Notið tölur eða tákn eftir því sem við á til að sýna öll stök í öllum vigrum eða fylkjum.

**8.** **(30)** Niðurstöður ($y$) tiltekinna prófana á sjúklingum voru fengnar með þremur mælitækjum ($m = 1, 2, 3$) og eftir mismunandi marga daga ($x$) í meðferð. Prófanirnar felast í því að mæla eftirstöðvar tiltekins efnis. Þær eru gerðar á log-kvarða og því er reiknað með að línulegt samband gildi við tíma á þeim kvarða, þ.e. milli $y$ og $x$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 8 | 4 | 21 | 10 | 12 | 17 | 28 | 31 | 36 |
| $m$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |

Þessi gögn voru sett inn í tölfræðipakka til að kanna, hvaða atriði hafa áhrif á mælingarnar. Skilgreint var líkanið $y = \alpha_m + \beta_m x + e$.

Notað var SAS-forritið:

```
proc glm;
 classes m;
 model y=m m*x;
```

sem gefur eftirfarandi niðurstöður:

```
                              The GLM Procedure
Dependent Variable: y
                                      Sum of
 Source                    DF        Squares     Mean Square    F Value    Pr > F
 Model                      5    920.5555556     184.1111111       7.30    0.0663
 Error                      3     75.6666667      25.2222222
 Corrected Total            8    996.2222222

      R-Square     Coeff Var      Root MSE        y Mean
      0.924046      27.06560      5.022173      18.55556

 Source                    DF      Type I SS     Mean Square    F Value    Pr > F
 m                          2    779.5555556     389.7777778      15.45    0.0263
 x*m                        3    141.0000000      47.0000000       1.86    0.3110


 Source                    DF    Type III SS     Mean Square    F Value    Pr > F
 m                          2    147.8412698      73.9206349       2.93    0.1970
 x*m                        3    141.0000000      47.0000000       1.86    0.3110
```

(frh.)

Skrifa má líkanið þannig: $Y_i \sim n\left(\alpha + \beta_m + \gamma_m x_i, \sigma^2\right)$.

(a) Nota má líkanið til að spá fyrir um gildi á hverri mælingu. Hver verður þá fylgnin milli mælinganna og spárinnar?

(b) Hvað myndi líkanið $Y_i \sim n\left(\alpha + \gamma_m x_i, \sigma^2\right)$ útskýra mikinn breytileika?

(c) Hvert er matið á dreifni gagnanna ($y$-mælinganna)?

(d) Má einfalda líkanið?

(e) Er líkanið óþarft?

(f) Hvert er meðaltal (y-)mælinganna og hver er spáin um það meðaltal samkvæmt líkaninu?

Munið að rökstyðja öll svörin með tilvísunum í tölur og uppsetningu á líkönum og núlltilgátum. Athugið að finna má allar tölur, sem leggja þarf til grundvallar, í útkomunnu úr SAS keyrslunni, en að sjálfsögðu má einnig reikna þær út töflunni.