

Háskóli Íslands	<b>09.10.16 Línuleg algebra og tölfræði</b>	Raunvísindadeild
Mánudagur	23. ágúst 2004	kl 13:30-16:30
Leyfileg hjálpargögn: Glósur, bækur og reiknivélar	Athugið að fartölvur eru ekki leyfðar.	Vægi dæma er gefið: 100 stig teljast full lausn, en alls eru stigin fleiri.

Notið 5% marktækniröfu nema annað sé tekið fram. Munið að taka skýrt fram núlltilgátur og gagntilgátur þar sem það á við.

1. (25) Látum  $\mathbf{X}$  vera fylkið sem hefur  $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 1, 1)'$ ,  $\mathbf{b} = (0, 0, 1, 1, 0)'$ , og  $\mathbf{c} = (2, 2, 2, 2, 2)'$  sem dálkvigra. Látum síðan  $\mathbf{y}$  vera dálkvigurinn  $\mathbf{y} = (2, 1, 0, 2, 1)'$ . Látum  $\mathbf{V}$  vera það hlutrúm í  $\mathbb{R}^5$ , sem spannast af  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{c}$ .

Finnið  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{y}^\perp \in \mathbf{V}^\perp$  og  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R}^3$  þannig að  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^\perp$  og  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ .

2. (10) Undir ákveðnum kringumstæðum verður fylgnistuðlafylki milli þriggja mælibreyta þannig:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvað útskýrir fyrsti meginþátturinn mikið af “breytileikanum”, sem liggur í þessu fylki?

3. (15) Teiknið mynd og nýtið hana til að finna þau gildi,  $x$  og  $y$ , sem lágmarka  $z = 2x - y$  með tilliti til

$$\begin{aligned} 4x + 3y &\leq 12 \\ -x + y &\leq 2 \\ x + 2y &\geq 2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Munið að rökstyðja svarið.

4. (10) Tvö afbrigði ( $i$ ) af víðiplöntum voru sett í þrjú hitaskápa þar sem hitinn ( $j$ ) var stilltur nákvæmlega í hverjum skáp. Gerðar voru mælingar ( $y_{ij}$ ) á vexti plantanna eftir 3 vikur.

Setjið nákvæmlega fram á fylkjaformi líkan fyrir samvikagreiningu þar sem hæð plantna er spáð með samkvæmt hitastigi (samfelld breyta) og afbrigði (flokkunarbreyta), með samlagningaráhrifum. Notið tölur eða tákn eftir því sem við á til að sýna öll stök í öllum vigrum eða fylkjum.

5. (20) Jón bóndi í Vesturdal gortar gjarnan yfir verðurfari í sinni sveit og fullyrðir að þar sé jafnan mun hlýrra en hjá Sigfúsi í Austurdal. Sigfús ákveður sumar nokkurt að láta reyna á fullyrðingar Jón og gerir 10 mælingar á hvorum stað. Fæst þá meðalhitinn  $15.5^{\circ}\text{C}$  (staðalfrávik  $1.2^{\circ}\text{C}$ ) í Vesturdal en  $14.7^{\circ}\text{C}$  (staðalfrávik  $1.4^{\circ}\text{C}$ ) í Austurdal.

- (a) Reiknið öryggismörk fyrir sumarhitastigið hjá Sigfúsi
- (b) Er marktækur munur á hitastiginu?

6. (10) Látum  $X$  vera strjála hendingu sem getur tekið gildin 1, 2, 3 og 4. Látum að auki  $k$  vera tölu þannig að líkur á að  $X$  taki gildið  $x$  sé  $kx$  fyrir  $x = 1, 2, 3, 4$ .

- (a) Hvað þarf  $k$  að vera?
- (b) Hvað er þá  $P[X \geq 2]$ ?
- (c) Hvert er væntigildi  $X$ ?

7. (10) Alls taka 59 nemendur próf í námskeiði. Af þeim 33 sem fengu góðar vetrareinkunnir féll einn á prófinu. Af þeim sem fengu slakari vetrareinkunnir féllu 12 á prófinu.

- (a) Prófið hvort munurinn er marktækur og túlkið niðurstöðuna?
- (b) Hverjar eru forsendur prófsins og standast þær?

8. (30) Nota skal almenna aðhvarfsgreiningu (nánar tiltekið samvikagreiningu) til að kanna, hvernig  $y$  breytist í takt við tiltekinn þátt,  $a$  og samfelldar mælingar  $x$ . R skipunin  $\mathbf{f} \mathbf{M} \left\langle -\mathbf{I} \mathbf{m}(\mathbf{y} \sim \mathbf{a} + \mathbf{x} + \mathbf{a} * \mathbf{x}) \right\rangle$  var notuð til að meta stika líkansins  $y = \mu + \gamma_a + \beta x + \delta_a x$ .

Líkanið er síðan greint nánar með nokkrum R skipunum, eins og fram kemur á næstu síðum. Athugið að líkanið má túlka sem línur með mismunandi skurðpunktum og hallastuðlum.

Munið að rökstyðja svörin með tilvísun í tiltekna(r) tölu(r) í úttakinu.

- (a) Má sleppa  $x$  alveg?
- (b) Hvað eru mörg gildi á þættinum  $a$ ?
- (c) Hvert er matið á  $\beta$ ?
- (d) Má sleppa  $a$  alveg?
- (e) Hvað er  $SSTOT$ ?
- (f) Hvert er óvissumatið á  $\beta$  (þ.e.  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ )?
- (g) eru hallatölurnar marktækt breytilegar eftir gildum á  $a$ ?
- (h) Hvað er  $SSE$  í líkaninu?

```
> summary(lm(y ~ a+x+a*x))
```

```
Call:
```

```
lm(formula = y ~ a + x + a * x)
```

```
Residuals:
```

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-8.774e-01	-2.833e-01	-6.072e-17	2.833e-01	8.774e-01

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	4.48955	0.53687	8.362	7.97e-06	***
a-0.5	-2.07974	0.83732	-2.484	0.032332	*
a0.5	-1.45065	0.92570	-1.567	0.148163	
a1.5	-0.57245	1.02170	-0.560	0.587612	
a2.5	5.74996	1.12339	5.118	0.000452	***
x	0.90869	0.12482	7.280	2.66e-05	***
a-0.5:x	-0.06806	0.17652	-0.386	0.707896	
a0.5:x	-0.02193	0.17652	-0.124	0.903607	
a1.5:x	0.13396	0.17652	0.759	0.465438	
a2.5:x	-0.18311	0.17652	-1.037	0.324024	

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.6241 on 10 degrees of freedom  
Multiple R-Squared: 0.9881, Adjusted R-squared: 0.9774  
F-statistic: 92.34 on 9 and 10 DF, p-value: 1.961e-08
```

```
> anova(lm(y ~ a+x+a*x))
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Response: y
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
a	4	225.386	56.347	144.6618	8.369e-09	***
x	1	96.991	96.991	249.0103	2.146e-08	***
a:x	4	1.318	0.329	0.8459	0.5273	
Residuals	10	3.895	0.390			

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> drop1(lm(y ~ a+x+a*x),test='F')
```

Single term deletions

Model:

```
y ~ a + x + a * x
```

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC	F value	Pr(F)
<none>			3.8951	-12.7205		
a:x	4	1.3179	5.2129	-14.8918	0.8459	0.5273

```
> anova(lm(y ~ a),lm(y ~ a+x+a*x))
```

Analysis of Variance Table

Model 1: y ~ a

Model 2: y ~ a + x + a \* x

	Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)
1	15	102.204				
2	10	3.895	5	98.309	50.479	8.985e-07 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> anova(lm(y ~ x),lm(y ~ a+x+a*x))
```

Analysis of Variance Table

Model 1: y ~ x

Model 2: y ~ a + x + a \* x

	Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)
1	18	103.691				
2	10	3.895	8	99.796	32.026	3.808e-06 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1