

Háskóli Íslands	<b>09.10.16 Línuleg algebra og tölfræði</b>	Raunvísindadeild
Priðjudagur	<b>13. desember 2005</b>	kl 13:30-16:30
<b>Leyfileg hjálpargögn:</b> Glósur, bækur og <b>allar gerðir</b> reiknivéla	<b>Athugið</b> að fartölvur eru ekki leyfðar.	<b>Vægi</b> dæma er gefið: 100 stig teljast full lausn, en alls eru stigin fleiri.

Notið 5% marktækniröfu nema annað sé tekið fram. Munið að taka skýrt fram núlltilgátur og gagntilgátur þar sem það á við.

Dálkvigurinn  $\mathbf{y} = (4, 1, 4, 0, 3, 1, 0, 1, 0, 1)'$  og fylkið

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

verða notuð í dæmum 1-3.

Skrifum enn fremur  $V = sp\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ,  $\hat{\mathbf{y}} = proj_V(\mathbf{y})$  og  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$

- (10)** Finnið  $\hat{\mathbf{y}}$ .
- (10)** Fylkið  $\mathbf{X}$  tilsvavar X-fylki línulegs líkans eins og það yrði sett up í R. Þetta líkan inniheldur einn þátt sem lýsir því hvort efni A hefur verið notað eða efni B ásamt breytu sem lýsir hitastigi. Setjið upp jöfnu slíks líkans og sýnið hvernig það tengist fylkinu að ofan.
- (10)** Finnið matið á stuðlunum í líkaninu í dæmi 2.

4. (15) Finna skal þau gildi,  $x$  og  $y$ , sem hámarka  $z = x - 2y$  með tilliti til

$$3x + y \geq 3 \quad (1)$$

$$x - y \leq 2 \quad (2)$$

$$x + y \leq 4 \quad (3)$$

$$y \leq 2 \quad (4)$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

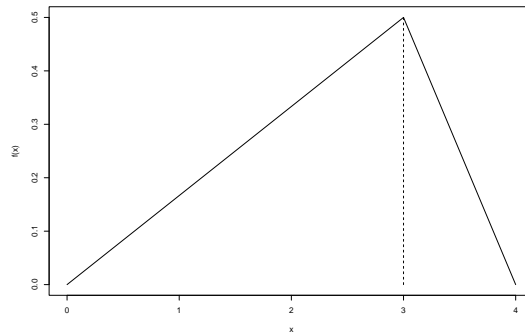
(a) Teiknið mynd sem lýsir þessu línulega bestunarverkefni.

(b) Leysið verkefnið.

(c) Hver verður lausnin ef á að lágmarka  $z$ ?

(d) Hver verður lausnin ef ójöfnu (2) er snúið við?

5. (10) Tilttekinni líkindadreifingu er lýst með samfelldu þéttifalli,  $f$ , sem sýnt er á myndinni.



(a) Hver er jafna (stæða)  $f$ ?

Látum nú  $X$  vera hendingu með þéttifallið  $f$ .

(b) Hvað er  $P[X \geq 1]$ ?

(c) Hvert er væntigildi  $X$ ?

**(6).** **(20)** Mælingar á hitastigi á þremur stöðum á landinu gáfu eftirfarandi niðurstöður:

Staður	A	B	C
$n$	10	5	14
$\bar{x}$	12.2	20.5	11.3
$s$	1.3	1.1	1.4

Kanna skal, hvort marktækur munur sé á hitastigi staðanna.

- (a) Setjið upp tilsvarendi líkan, núlltilgátu og gagntilgátu.
- (b) Prófið núlltilgátuna.
- (c) Hverjar eru forsendur prófsins?

Til hliðsjónar, tölur sem gætu komið að gagni:

```
> qf(0.95, 3, 29)
[1] 2.93403
> qf(0.975, 3, 29)
[1] 3.607187
> qf(0.95, 2, 29)
[1] 3.327654
> qf(0.95, 2, 28)
[1] 3.340386
> qf(0.95, 2, 27)
[1] 3.354131
> qf(0.95, 2, 26)
[1] 3.369016
> qf(0.975, 2, 26)
[1] 4.265483
> qf(0.975, 2, 27)
[1] 4.242094
```

**7.** **(15)** Könnun meðal 100 kjósenda bendir til þess að 53 muni kjósa Mr Flanders í komandi kosningum. Mr Flanders fullyrðir að hér sé um hreinan meirihluta að ræða.

- (a) Er ályktun Mr Flanders réttlæt看leg?
- (b) Andstæðingurinn, Mr Simpson, hefur undir höndum niðurstöður annarrar könnunar 150 kjósenda þar sem hann fær 80 þeirra atkvæða. Er munurinn á könnuninum marktækur?

8. (30) Niðurstöður ( $y$ ) tiltekinna prófana á sjúklingum voru fengnar með þremur mælitækjum ( $m = 1, 2, 3$ ) og eftir mismunandi marga daga ( $x$ ) í meðferð. Prófanirnar felast í því að mæla eftirstöðvar tiltekins efnis. Þær eru gerðar á log-kvarða og því er reiknað með að línulegt samband gildi við tíma á þeim kvarða, þ.e. milli  $y$  og  $x$ .

Þessi gögn voru sett inn í tölfræðipakka til að kanna, hvaða atriði hafa hugsanlega áhrif á mælingarnar. Skilgreint var líkanið  $y = \mu + \alpha_m + \beta x + e$  og hér fyrir neðan kemur tilsvareandi úttak úr R.

**Munið að rökstyðja svörin með tilvísun í tiltekna(r) tölu(r) í úttakinu. Ekki dugar t.d. að vísa almennt í “P-gildi” heldur þarf að skrifa sjálft gildið!**

- (a) Er marktækur munur á niðurstöðum eftir því hvaða mælitæki er notað?
- (b) Er marktækur munur á mælitækjum 1 og 2?
- (c) Hvað er  $SSE$ ?
- (d) Lítið á núlltilgátuna  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Verður henni hafnað þegar tekið er tillit til  $x$ ?
- (e) Hvert er t-gildið fyrir próf á núlltilgátunni  $H_0 : \beta = 2$ ?
- (f) Hver eru öryggismörk fyrir  $\beta$  (þ.e.  $\hat{\beta} \pm t^* \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ )?
- (g) Má sleppa öllum liðum úr líkaninu?
- (h) Hver er spáin um prófniðurstöðu ( $\hat{y}$ ) úr mælitæki 1 eftir 4 daga?
- (i) Lítið er svo á að  $y$ -mælingarnar séu útkomur hendinga með fast staðalfrávik. Hvert er matið á því staðalfrávik?

**Gögnin:**

```
> dat
  x  y m
1 2  8 1
2 2  4 1
3 3 21 1
4 4 10 2
5 4 12 2
6 7 17 2
7 7 28 3
8 9 31 3
9 9 36 3
```

```
> summary(lm(y ~ m+x,data=dat))
```

```
Call:
lm(formula = y ~ m + x, data = dat)
```

```
Residuals:
    1     2     3     4     5     6     7     8     9
-1.9524 -5.9524  7.9048  0.1429  2.1429 -2.2857  0.5238 -2.7619  2.2381
```

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    3.667      4.777   0.768   0.477
m2             -6.381      5.964  -1.070   0.334
m3              1.810     10.612   0.171   0.871
x               3.143      1.633   1.924   0.112
```

```
Residual standard error: 4.99 on 5 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8751,    Adjusted R-squared: 0.8001
F-statistic: 11.67 on 3 and 5 DF,  p-value: 0.01073
```

```
> anova(lm(y ~ m+x,data=dat))
```

```
> anova(lm(y~m+x,data=dat))
Analysis of Variance Table
```

```
Response: y
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
m       2  779.56   389.78  15.6567 0.007035 **
x       1   92.19    92.19   3.7031 0.112300
Residuals  5  124.48    24.90
```

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```

> drop1(lm(y ~ m+x,data=dat),test="F")

> drop1(lm(y~m+x,data=dat),test="F")
Single term deletions

Model:
y ~ m + x

```

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC	F value	Pr(F)
<none>			124.476	31.642		
m	2	104.041	228.517	33.109	2.0896	0.2190
x	1	92.190	216.667	34.630	3.7031	0.1123

```

> anova(lm(y ~ 1,data=dat),lm(y ~ m+x,data=dat))

> anova(lm(y~1,data=dat),lm(y~m+x,data=dat))
Analysis of Variance Table

Model 1: y ~ 1
Model 2: y ~ m + x

```

Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)
1	8 996.22				
2	5 124.48	3	871.75	11.672	0.01073 *

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```