TÖL203F Reikniririt, rökfræði og reiknanleiki

Lokapróf **9. maí, 2012**
Kennari: Hjálmtýr Hafsteinsson **kl. $9^{00} – 12^{00}$**

Öll dæmin hafa sama vægi. ***Aðeins þarf að leysa 5 dæmi af 6. Fimm bestu dæmin gilda***. *Öll skrifleg hjálpargögn og reiknivél leyfileg*

- Athugið að svar án rökstuðnings er einskis virði. Rökstyðjið því öll svör og munið að það er óþarfi að skrifa upp skilgreiningar sem eru í bókinni.

1. Lát **Z** vera mengi allra heiltalna (e. integers) og **Q** mengi allra ræðra talna (e. rational numbers). Sannið eða afsannið: Mengið **Z** x **Q** er teljanlegt (e. countable).

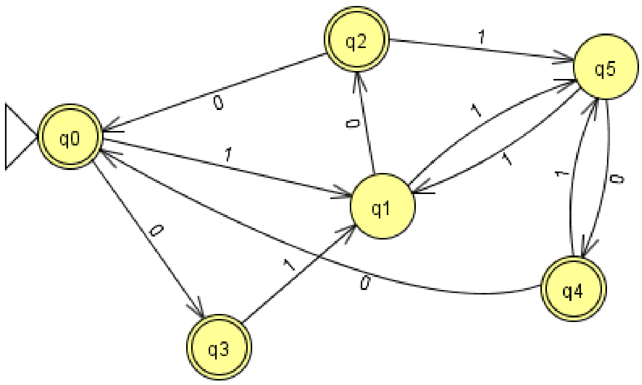
2. *a)* Gefin eru þrístæðu venslin ***3-Ólík***, sem samanstanda af þrenndum (a, b, c) þar sem $a \neq b$, $b \neq c$ og $c \neq a$. Eru þessi vensl fallvensl? Rökstyðjið svar ykkar.

b) Fallið **gcd**(x, y) skilar stærsta samdeili (e. greatest common divisor) heiltalnanna x og y. Við gefum okkur að $x \geq y$ og að $y \geq 0$. Hægt er að skilgreina **gcd**(x, y) þannig að það skilar x ef y=0, en skilar **gcd**(y, x mod y) annars.

i) Setjið fallið **gcd** upp sem fall á λ-formi
ii) Finnið fallið H, sem hefur **gcd** sem fastapunkt með því að nota fastapunktsvirkjann Y (e. Y combinator).
iii) Notið fallið H til að finna **gcd**(6, 4). Sýnið öll skref í útreikningnum.

3. *a)* Sýnið *i)* reglulega segð **og** *ii)* endanlega stöðuvél (finite automata) fyrir þá strengi yfir stafrófið {a, b, c}, þar sem fyrsta a-ið kemur á undan fyrsta b-inu.

b) Lágmarkið eftirfarandi löggenga endanlega stöðuvél (e. DFA) og sýnið skrefið sem þið takið:



4. *a)* Sýnið BDD (þ.e. ROBDD) fyrir rökyrðinguna $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_4)$ miðað við breyturöðina $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

b) Finnið aðra breyturöð sem gefur minna BDD (þ.e. færri hnútar). Útskýrið hvers vegna hnútunum fækkar.

5. Gefið er málið $L = \{ a^i b^j \mid |i-j| = 2 \}$, þ.e. allir strengir af gerðinni $a^i b^j$, þar sem munurinn á milli fjölda a-a og fjölda b-a er 2.

a) Sýnið málfræði sem skilgreinir L og rökstyðjið hana í nokkrum orðum.

b) Lýsið staflavél sem samþykkir L. Þið megið lýsa henni í orðum, en lýsingin þarf að vera nógu nákvæm til að auðvelt væri að setja staflavélina fram á venjulegu formi.

c) Notið dælusetninguna til að sýna að L er ekki reglulegt mál.

6. *a)* Gefið er málið $L_7 = \{ \langle M \rangle \mid M$ er Turing vél og $|L(M)| \geq 7 \}$. L_7 er mengi Turing véla sem samþykkja að minnsta kosti 7 strengi. Sýnið að L_7 er Turing samþykkjanlegt (e. recognizable).

b) Mál L er lokað undir viðsnúningi (e. reversal) ef fyrir sérhvert w sem er í L þá er w^R í L. Sýnið að málið $L_{rev} = \{ \langle M \rangle \mid M$ er Turing vél og $L(M)$ er lokað undir viðsnúningi $\}$ er ekki ákvarðanlegt (e. not decidable). Ekki nota setningu Rice í þessu dæmi, heldur notið yfirfærslu (e. reduction).