

09.12.14 Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Haustpróf

19. ágúst 1996
kl. 9⁰⁰-13⁰⁰

Öll dæmin hafa sama vægi. Einungis þarf að svara 6 dæmum af 7. Bestu 6 svörin gilda. Öll skrifleg hjálpargögn leyfileg.

1. Lát U vera almengið og $A, B \subseteq U$ vera tvö mengi. Sannið eftirfarandi:
- $A \cup B = U$ þá og því aðeins að $\overline{A} \subseteq B$.
 - $A \cap B = \emptyset$ þá og því aðeins að $B \subseteq \overline{A}$.

2. Sannið með þrepun:

$$(n+1)! - 1 = 1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) \quad \text{fyrir } n \geq 1$$

3. a) Hversu margar lausnir eru á jöfnunni

$$x_1 + x_1 + \dots + x_r = n$$

ef n er heiltala (≥ 0), $n \geq r$ og x_i eru allt heiltölur (≥ 0) fyrir $i = 1, \dots, r$?

- b) Hversu margar lausnir eru á jöfnunni að ofan ef röð talnanna í summunni skiptir máli?

4. Fyrir hver af eftirfarandi venslum segið til um hvort þau séu sjálfhverf (reflexive), samhverf (symmetric), andsamhverf (antisymmetric) eða gegnvirk (transitive). Gefið einnig til kynna ef venslin eru jafngildisvensl (equivalence relation) eða hlutröðunarvensl (partial order).

- R eru vensl á heiltölurnar og $(a, b) \in R$ þþaa $|a - b| < 1$.
- R eru vensl á mengi allra þríhyrninga í planinu. Fyrir þríhyrninga t og s þá er $(t, s) \in R$ þþaa að minnsta kosti tvær hliðar t eru innan s .
- R eru vensl á mengið $A = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, þannig að $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$ þþaa $(y_1 - x_1) = (y_2 - x_2)$

5. Fullkomna tvíflokkja grafið á $m+n$ hnúta $K_{m,n}$ hefur m hnúta í öðrum flokknum og n hnúta í hinum og allar stikur á milli flokkanna, en engar innan flokkanna. Munið að *vegur* (path) á milli tveggja hnúta er stysta leið á milli þeirra í grafinu. Hver er lengd lengsta vegar í eftirfarandi gröfum?
- a) $K_{1,4}$
 - b) $K_{3,7}$
 - c) $K_{m,n}$
6. a) Sýnið hvernig hægt er að breyta fullkomnu 3-undartré T í fullkomið tvíundartré T' . Hversu mörgum hnútum þarf að bæta við? Ef T hefur hæðina 3 hver þá mesta möguleg hæð T' ? En minnsta möguleg hæð?
- b) Svarið ofangreindum spurningum fyrir fullkomið m -undartré T (þ.e., fjöldi viðbótahnúta, mesta og minnsta hæð T').
7. a) Sýnið málfræði fyrir mengi stengja yfir $\{a, b\}$ sem enda **ekki** á ab .
- b) Sýnið endanlega stöðuvél sem les inn strengi yfir $\{a, b\}$ og hefur úttakið 1 ef síðustu tveir lesnir stafir eru **ekki** ab , en 0 annars.