08.71.14 Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Lokapróf **17. desember, 2003**
Kennari: Hjálmtýr Hafsteinsson **kl. $13^{30} – 16^{30}$**

Öll dæmin hafa sama vægi. ***Aðeins þarf að leysa 5 dæmi af 6. Fimm bestu dæmin gilda****. Öll skrifleg hjálpargögn og reiknivél leyfileg.*

- Athugið að svar án rökstuðnings er einskis virði. Rökstyðjið því öll svör og munið að það er óþarfi að skrifa upp skilgreiningar sem eru í bókinni.

1. Munið að $\oplus$ er rökaðgerðin *annaðhvort eða* (e. XOR).

a) Hvert er sanngildi rökyrðingarinnar $\mathbf{T} \oplus \mathbf{T} \oplus \mathbf{T}$, þar sem **T** er sanngildið **satt**?

b) Hvert er sanngildi rökyrðingarinnar $\mathbf{T} \oplus \mathbf{T} \oplus \ldots \oplus \mathbf{T}$, þar sem **T** kemur fyrir n sinnum?

c) Sannið einskonar DeMorgan lögmál fyrir $\oplus$:

$$\neg(p \oplus q) \equiv (p \oplus \neg q)$$

Þið eigið ekki að nota sanntöflur, heldur að leiða lögmálið út með því að nota ykkur reglurnar í töflum 5, 6 og 7 á bls. 24 í kennslubókinni og eftirfarandi skilgreiningu á aðgerðinni $\oplus$:

$$(p \oplus q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

2. Sannið að ef n er frumtala (þ.e. prímtala) stærri en 3, þá er n annaðhvort samleifa 1 eða 5 mátað við 6. Með öðrum orðum, annað hvort gildir $n \equiv 1 \ (\mathbf{mod}\ 6)$ eða $n \equiv 5 \ (\mathbf{mod}\ 6)$.

3. *a)* Á hve marga vegu er hægt að frá *þrjú eins* (e. three of a kind) í póker, þ.e. á 5 spila pókerhendi eru 3 spil með sama gildi, en hin 2 hafa önnur gildi? Til dæmis 5-5-5-9-K.

b) Á hve marga vegu er hægt að fá *röð* (e. straight), þar sem öll spilin eru í röð og liturinn skiptir ekki máli? Til dæmis 4-5-6-7-8.

c) Á hve marga vegu er hægt að fá *röð í kringum hornið* (e. around-the-corner straight), þar sem öll spilin eru í röð og röðin má líka fara hringinn? Til dæmis Q-K-A-2-3.

d) Á hve marga vegu er hægt að fá pókerhendi sem hefur engin pör (e. no pair hand), þ.e. engin tvö spil með sama gildi? Til dæmis 3-7-8-10-K.

4. *a)* Lát R og S vera andsamhverf (e. antisymmetric) vensl á mengið A. Sannið eða afsannið eftirfarandi fullyrðingar

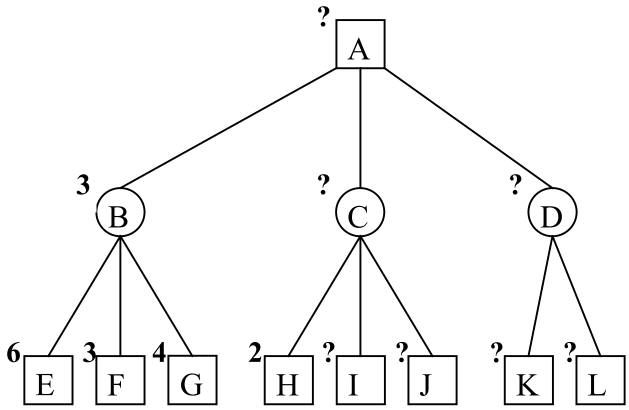
i) Venslin $R \cup S$ eru andsamhverf.
ii) Venslin $R \cap S$ eru andsamhverf.
iii) Venslin $R - S$ eru andsamhverf.

b) Lát R vera ósamhverf (e. asymmetric) vensl. Eru þá fyllivenslin (e. complementary relation) $\overline{R}$ *i)* samhverf, eða *ii)* ósamhverf? Rökstyðjið svörin.

5. Í leikjatrjám geta gildi hnútanna (þ.e. staðanna) verið almennar tölur, ekki aðeins +1, -1 og 0 eins og í leikjatrjánum fyrir *Nim*. Eftir sem áður vill fyrri leikmaðurinn (kassa-hnútar) hámarka gildið, en seinni leikmaðurinn (hring-hnútar) lágmarka gildið.

a) Í leikjatrénu hér að neðan er verið að reikna út gildi stöðunnar A. Það er búið að reikna út B (út frá E, F og G) og einnig er búið að finna gildið á H. Allir hnútar sem eftir er að reikna gildi á eru merktir með **?**. Útskýrið hvers vegna það er óþarfi að ljúka við útreikning á C eftir að þetta gildi á H hefur fundist.

b) Lýsið almennri aðferð til að reikna út gildi leikjatrjáa sem byggir á ofangreindri hugmynd.



6. *a)* Sýnið reglulega segð fyrir bitastrengi sem ekki enda á "00".

b) Sýnið formlega málfræði fyrir málið **0(11)*(00)*1**.

c) Sýnið endanlega stöðuvél sem samþykkir bitastrengi þar sem fjöldi 0-bita hefur afganginn 2 þegar deilt er í fjöldann með 3 (þ.e. fjöldi 0-bita er ≡ 2 **mod** 3), og fjöldi 1-bita er jöfn tala.