

# 08.71.14 Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Lokapróf

Kennari: Hjálmtýr Hafsteinsson

15. desember, 2004

kl. 13<sup>30</sup> – 16<sup>30</sup>

Öll dæmin hafa sama vægi. Aðeins þarf að leysa 5 dæmi af 6. Fimm bestu dæmin gilda. Öll skrifleg hjálpargögn og reiknivél leyfileg.

- Athugið að svar án rökstuðnings er einskis virði. Rökstyðjið því öll svör og munið að það er óþarfi að skrifa upp skilgreiningar sem eru í bókinni.

1. Sannið eftirfarandi fullyrðingar með hjálp reglanna í kafla 1.2 í kennslubókinni (bls. 24). Nefnið í hverju skrefi hvaða reglu þið notið. **Ekki** nota sanntöflur.

a) Rökyrðingin  $((\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$  er sísanna (e. tautology).

b) Rökyrðingin  $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$  er jafngild rökyrðingunni  $\neg(p \rightarrow q)$ .

2. a) Notið þrepun til að sýna að jafnan  $\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$  fyrir allar náttúrulegar tölur  $n$ .

b) Lát heiltölurnar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  allar vera oddatölur. Sannið að margfeldi þeirra allra, þ.e. talan  $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ , sé oddatala.

3. Í hverju tilfelli sýnið **minnstu venslin** yfir mengið  $\{ a, b, c \}$  sem hafa eiginleikanna. Rökstyðjið jafnframt í hverju tilfelli að venslin séu þau minnstu sem uppfylla skilyrðin.

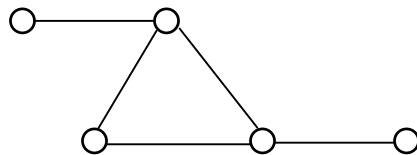
a) Gegnvirk, ekki sjálfhverf, ekki samhverf.

b) Sjálfhverf, samhverf, ekki gegnvirk.

c) Andsamhverf, samhverf, ósjálfhverf.

d) Gegnvirk, ósamhverf, ekki ósjálfhverf.

4. Gefið er netið hér að neðan:



Á hve marga vegu má merkja hnútana með bókstöfunum  $a, b, c, d$  og  $e$  þannig að netin séu einsmóta (e. isomorphic), en ekki sama netið? Með öðrum orðum, hversu mörg ólík merkt net eru sammóta netinu að ofan? Útskýrið hvernig þið reiknið út töluna.

5. Fyllinetið (e. complementary graph)  $\bar{G}$  hefur sömu hnúta og netið  $G$ , en stika  $(u, v)$  er í  $\bar{G}$  þá og því aðeins að hún er ekki í  $G$ . Sýnið að ef  $G$  er tvíflokkja (e. bipartite) með fleiri en 4 hnúta, þá er  $\bar{G}$  ekki tvíflokkja.

6. a) Sýnið endanlega stöðuvél sem samþykkir málið sem lýst er með reglulegu segðinni:

$$(1(0 \cup 1)0^*(0 \cup 1))^*$$

b) Málfræði er sögð vera *tvíræð* (e. ambiguous) ef hægt er að búa til tvö mismunandi þáttunartré (e. derivation trees) fyrir saman strenginn sem er í málinu. Gefin er málfræði með hjálpartáknið  $S$  (sem jafnframt er upphafstákn), lokatáknin  $a$  og  $b$  og reglurnar  $S \rightarrow SS$ ,  $S \rightarrow a$  og  $S \rightarrow b$ . Er þessi málfræði tvíræð? Rökstyðjið.