

08.71.14 Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Lokapróf

Kennari: Hjálmtýr Hafsteinsson

12. desember, 2005

kl. 13³⁰ – 16³⁰

Öll dæmin hafa sama vægi. Aðeins þarf að leysa 5 dæmi af 6. Fimm bestu dæmin gilda. Öll skrifleg hjálpargögn og reiknivél leyfileg.

- Athugið að svar án rökstuðnings er einskis virði. Rökstyðjið því öll svör og munið að það er óþarfi að skrifa upp skilgreiningar sem eru í bókinni.
1. a) Rökfræðivirkinn $(p \rightarrow q)$ gefur aðeins **ósatt** þegar p er **satt**, en q **ósatt**. Mörgum finnst sérkennilegt að útkoman úr $(p \rightarrow q)$ sé **satt** alltaf þegar p er **ósatt**. Við skulum því skilgreina nýjan virkja, $(p \text{ veldur } q)$, sem er eins og $(p \rightarrow q)$, nema niðurstaðan er **ósatt** þegar p er **ósatt**.
- i) Sýnið sanntöflu $(p \text{ veldur } q)$.
 - ii) Sannið að $(p \text{ veldur } q) \wedge (q \text{ veldur } p)$ er ekki jafngilt $(p \leftrightarrow q)$.
 - iii) Breytir það einhverju í ii)-lið ef við látum $(p \text{ veldur } q)$ vera **satt** þegar p er **ósatt**, en q **satt**?
- b) Rökfræðivirkinn \oplus skilgreinir aðgerðina *annaðhvort eða* (e. XOR, exclusive or). Er þessi virki tenginn (e. associative)? Sannið eða sýnið mótdæmi.
2. Lát A, B og C vera einhver mengi. Sannið með mótdæmi að eftirfarandi jafna **gildi ekki**. Rökstyðjið svar ykkar vel.

$$((A - B) - C) \cup (B - C) = (A - C)$$

3. Sannið með þrepun að

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2} < 1 - \frac{1}{n} \text{ fyrir } n \geq 2.$$

4. Setja á í bókahillu tíu mismunandi bækur. Fimm bókanna eru glæpasögur, þrjár eru ljóðabækur og tvær eru fræðibækur. Reiknið eftirfarandi fjölda möguleika og rökstyðjið útreikninga ykkar.
- a) Á hve marga vegu er hægt að raða bókunum upp í hilluna?
 - b) Á hve marga vegu er hægt að raða bókunum ef glæpasögurnar fimm þurfa að vera lengst til vinstri í hillunni?
 - c) Á hve marga vegu er hægt að raða bókunum ef bækur af sömu gerð verða að vera saman?
 - d) Á hve marga vegu er hægt að raða bókunum ef fræðibækurnar tvær mega ekki vera hlið við hlið?

5. a) Gefin eru venslin $R = \{ (1,2), (1,1), (2,2), (3,1), (1,3) \}$ á mengið $\{1, 2, 3\}$. Finnið venslin $R \circ R$ og svarið því hvort þau vensl séu *i)* sjálfhverf, *ii)* ósjálfhverf, *iii)* samhverf, *iv)* andsamhverf, *v)* gegnvirk. Rökstyðjið hvert svar.
- b) Lát venslin S vera skilgreind yfir náttúrulegu tölurnar þannig að $(a, b) \in S$ þá og því aðeins að $a^2 + b$ sé jöfn tala. Eru venslin S jafngildisvensl? Sannið eða afsannið.
6. a) Gefið dæmi um net sem hefur Euler-hring, en ekki Hamilton-hring.
- b) Gefið dæmi um net sem hefur bæði Euler-hring og Hamilton-hring, en hringirnir eru ekki eins.