Háskóli Íslands	09.10.45 Tölfræði I	Raunvísindadeild
Fimmtudagur	13. maí 2004	kl 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Skriffæri og reiknivél. Jöfnublöðum er dreift með prófinu.		Dæmin vega jafnt.

1. Tilteknar staðlaðar mælingar á framleiðsluferli vöru skila útkomum sem tilsvara útkomum óháðra normaldreifðra hendinga með væntigildi $\mu = 4$ og staðalfrávik $\sigma = 0.4$ þegar framleiðsluferlið er í lagi. Fyrirtækið auglýsir meðaltalið 4 en samkvæmt alþjóðastaðli er vara sögð gölluð ef mælingin fer yfir 5.

(a) Hverjar eru líkurnar á að fá gallaða vöru þegar framleiðsluferlið er í lagi?

(b) Úrtak 10 mælinga gefur meðaltalið 4.8. Er réttlætanlegt fyrir neytendasamtökin að senda inn kvörtun um ranga auglýsingu?

(c) Hverjar eru líkurnar á að af 10 mælingum reynist a.m.k. 1 gölluð ef framleiðsluferlið er í lagi?

(d) Hverjar eru líkurnar á að fá a.m.k. 2 gallaðar af 50 ef framleiðsluferlið er í lagi?

2. Látið $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar og einsdreifðar hendingar sem lúta jafndreifingu á bilinu $[0, 1]$ og skilgreinið

$$X_{(n)} := max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

(a) Finnið dreififall $X_{(n)}$ og reiknið síðan væntigildi

$$\mu_{(n)} = E\left[X_{(n)}\right]$$

og staðalfrávik,

$$\sigma_{(n)} = \sqrt{V\left[X_{(n)}\right]}.$$

(b) Setjið

$$Z_{(n)} := \frac{X_{(n)} - \mu_{(n)}}{\sigma_{(n)}}$$

og finnið hvert $Z_{(n)}$ stefnir í dreifingu.

[Leiðbeining: Dæmið má leysa beint en athuga þarf sérstaklega hvernig mörkin á dreififalli $Z_{(n)}$ haga sér. Einfaldara getur verið að finna lokadreifingu skyldrar hendingar, $n(1 - X_{(n)})$ og beita síðan setningu Slutzky's af útsjónarsemi.]

3. Látið f vera þéttifallið sem skilgreinist með $f(x) = 2x/\theta^2$ ef $0 \leq x \leq \theta$ en er núll annars. Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar og einsdreifðar hendingar með þéttifall f og skilgreinum

$$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$U := \frac{3}{2}\bar{X}.$$

(a) Sýnið að U er óbjagaður metill fyrir θ og finnið dreifni U.

(b) Finnið nægjanlega reiknihendingu, T.

(c) Finnið óbjagaðan metil, W, sem bætir U.

(d) Hvað er hægt að segja um, hvort W er bestur óbjagaðra metla (MINVUE)?

[Leiðbeining: Í (c) og (d) getur verið gott að vita að T í (b) er líka ósmækkanleg og fullkomin]

4. Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar og einsdreifðar hendingar sem lúta dreifingu með þéttifall

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)(\mu/r)^r} x^{r-1} e^{-rx/\mu} \text{ ef } x > 0$$

og $f(x) = 0$ annars (þetta er algeng umritun á gamma-dreifingu).

(a) Finnið sennileikametilinn fyrir μ.

(b) Finnið sterkasta prófið (UMP) fyrir $H_0 : \mu = \mu_0$ gegn $H_1 : \mu = \mu_1$ miðað við að r sé gefið. Gerið ráð fyrir að $\mu_1 > \mu_0 > 0$ og sýnið hvernig prófið byggir á einfaldan hátt á $\bar{x}$.

5. Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar og einsdreifðar hendingar sem lúta dreifingu með þéttifall

$$f(x) = e^{-(x-\mu)} \text{ ef } x > \mu$$

og $f(x) = 0$ annars (hliðruð veldisvísisdreifing). Látum

$$X_{(1)} := min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

(a) Leiðið út dreififall og þéttifall $X_{(1)}$.

(b) Sýnið að $Q(\mathbf{X}, \mu) := X_{(1)} - \mu$ er vendihending með

$$P\left[a \leq Q(\mathbf{X}, \mu) \leq b\right] = e^{-na} - e^{-nb}$$

(c) Sýnið hvernig vendihendingin getur gefið öryggismörk (bil) fyrir μ.

(d) Lýsið, hvernig mætti gera öryggisbilið sem styst.