Háskóli Íslands	09.10.45 Tölfræði I	Raunvísindadeild
Miðvikudagur	18. ágúst 2004	kl 09:00-12:00
Leyfileg hjálpargögn: Skriffæri og reiknivél. Jöfnublöðum er dreift með prófinu.		Dæmin vega jafnt.

1. Mælingar (y) á uppskeru við mismunandi hitastig (x) gáfu eftirfarandi niðurstöður (tilbúnar tölur):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	10.0	15.0	20.0	10.0	15.0	20.0	10.0	15.0	20.0
y	11.3	13.1	12.7	10.6	13.9	15.5	11.2	13.0	14.1

Er unnt að fullyrða um samband milli hitastigs og uppskeru?

Gefið er:

$$\sum_i x_i = 135 \qquad \sum_i x_i^2 = 2175$$
$$\sum_i y_i = 115.4 \qquad \sum_i y_i^2 = 1499.66$$
$$\sum_i x_i y_i = 1777$$

[Athugið: Gera þarf grein fyrir forsendum og útreikningum.]

2. Látið $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar með þéttifall $f(x) = e^{-x}$ ef $x > 0$ en núll annars og skilgreinið

$$X_{(n)} := max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

(a) Finnið dreififall (cdf) $X_{(n)}$

(b) Finnið talnarunu, a_n þ.a. hendingarunan

$$X_{(n)} - a_n$$

sé samleitin í dreifingu og finnið markgildisdreifinguna.

3. Látið f vera þéttifallið sem skilgreinist með $f(x) = 2/\theta - 2x/\theta^2$ ef $0 \leq x \leq \theta$ en er núll annars. Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar og einsdreifðar hendingar með þéttifall f.

(a) Finnið nægjanlega reiknihendingu, T.

(b) Finnið óbjagaðan metil, U, fyrir θ, og (ef hægt er) W, sem bætir U.

(d) Ræðið, hvort W er bestur óbjagaðra metla (MINVUE)?

4. Látum $Y_1, \ldots, Y_n$ vera óháðar og einsdreifðar hendingar sem lúta Bernoulli dreifingu með stikanum θ, þ.e. $PY_i = 1] = \theta = 1 - P[Y_i = 0]$.

(a) Finnið sterkasta prófið (UMP) fyrir $H_0 : \theta = \theta_0$ gegn $H_1 : \theta = \theta_1$. Gerið ráð fyrir að $\theta_1 > \theta_0 > 0$ og sýnið hvernig prófið byggir á einfaldan hátt á $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_i Y_i$.

(b) Finnið sennileikapróf (LRT) fyrir $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegn $H_1 : \theta > \theta_0$

5. Látum p vera hóptíðni ríkjandi erfðaeiginleika, A og $1 - p$ vera tíðni víkjandi erfðaeiginleika, a. Afkvæmi erfa a eða A frá hvoru foreldri.

Mælingar eru gerðar á afkvæmum, sem sýna annað hvort víkjandi eiginleikann ef þau hafa aa (með líkunum $(1-p)^2$) eða sýna ríkjandi einkennið A, þ.e. hafa erfðasamsetinguna AA, Aa eða aA (með líkunum $1 - (1-p)^2$.

Af n afkvæmum völdum af handahófi kemur A sýnilega fram í X einstaklingum. Með öðrum orðum lýsir hendingin X fjölda afkvæma með erfðasamsetinguna AA, Aa eða aA. Þannig kemur víkjandi eiginleikinn aa fram í $Y = n - X$ afkvæmum.

(a) Finnið sennileikametilinn fyrir p.

(b) Ræðið, hvernig finna má öryggismörk fyrir p.

[Leiðbeining: Hver er líkindadreifing Y sem fall af stikanum $\tau = (1-p)^2$? Hvað er MLE fyrir τ? Hvert er samband þessara tveggja metla?]