Háskóli Íslands	09.10.45 Tölfræði I / 09.12.21 Grundvöllur tölfræðinnar	Raunvísindadeild
Miðvikudagur	22. ágúst 2005	kl 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Skriffæri og reiknivél. Jöfnublöðum er dreift með prófinu.		Dæmin vega jafnt.

1. Mælingar eru gerðar á tveimur eiginleikum. Gefið er

$$\begin{array}{ll} \bar{x} = 10.0 & \bar{y} = 12.1 \\ s_x = 4.1 & s_y = 3.7 \\ n_x = 5 & n_y = 7 \end{array}$$

Gefið ykkur og gerið grein fyrir forsendum sem til þarf og finnið síðan:

(a) Öryggismörk fyrir μ_x
(b) Öryggismörk fyrir $\mu_x - \mu_y$
(c) n_x sem þarf til að $\bar{x}$ í framtíðartilraun víki ekki meira en 0.2 frá μ_x (með 95% líkum).

2. Látið $X_1, \ldots, X_n \sim n(\mu, \sigma^2)$ vera óháðar og einsdreifðar og skilgreinið

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_i X_i$$

$$W := \sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^2 .$$

Dreifing $\frac{1}{\sigma^2} W$ er gefin (χ^2_{n-1}) ásamt væntigildi og dreifni þeirrar dreifingar. Þekkt er að ef $T_\alpha = \alpha W$, þá er T_α óbjagaður metill fyrir σ^2 ef $\alpha = \frac{1}{n-1}$.

(a) Finnið α þannig að T_α gefi lægsta gildi á $E\left[\left(T_\alpha - \sigma^2\right)^2\right]$.

(b) Finnið metil, S, sem er óbjagaður fyrir σ.

3. Látum $X_1, \ldots, X_n \sim U(\theta, \theta + 1)$ vera óháðar og einsdreifðar.

(a) Finnið safntíðnirit og þéttiföll $X_{(1)}$ og $X_{(n)}$.

(b) Lítið á reiknihendingarnar $\bar{X}$, $X_{(1)}$ og $X_{(n)}$, reiknið væntigildi og dreifni hverrar þeirra.

(c) Finnið óbjagaða metla fyrir θ byggt á hverri ofangreindra reiknihendinga.

(d) Mælið með metli, byggt á (c).

4. Lítið aftur á hendingarnar og þéttiföllin í (3).

(a) Finnið nægjanlega reiknihendingu.

(b) Sýnið að $V_\alpha := \alpha X_{(1)} + (1-\alpha)(X_{(n)} - 1)$ er sennileikametill fyrir θ ef $0 \le \alpha \le 1$.

(c) Finnið sterkasta prófið (UMP) fyrir $H_0 : \theta = \theta_0$ gegn $H_1 : \theta = \theta_1$. Gerið ráð fyrir að $\theta_1 > \theta_0 > 0$.

[Gerið grein fyrir vandkvæðum við prófið, ef við á]

5. Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar og einsdreifðar hendingar sem lúta gammadreifingu með þéttifall

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)(\mu/r)^r} x^{r-1} e^{-rx/\mu} \text{ ef } x > 0$$

og $f(x) = 0$ annars, þar sem r er þekktur fasti.

(a) Sýnið að $\sum_i X_i$ lýtur einnig gammadreifingu (byrjið má á $X_1 + X_2$ og draga síðan augljósa ályktun, en einfaldast er að nota spanfall vægis).

(b) Sýnið að $Q(\mathbf{X}, \mu) := \bar{X}/\mu$ er vendihending, þ.e.

$$P\left[a \le Q(\mathbf{X}, \mu) \le b\right]$$

er reiknanleg stærð sem er ekki háð μ (er m.ö.o. fastafall í μ).

(c) Sýnið hvernig nota má Q til að fá öryggismörk (bil) fyrir μ.

(d) Lýsið, hvernig má gera bilið styst.