

Háskóli Íslands	09.12.21	Raunvísindadeild
Laugardagur	6. maí 2006	kl 09:00-12:00
Leyfileg hjálpargögn: Skrif-færi og reiknivél. Jöfnublöðum er dreift með prófinu.		Dæmin vega jafnt.

Í dæmum 1-4 verður litið á úrtak (óháðar, einsdreifðar hendingar), X_1, \dots, X_n sem lúta Rayleigh dreifingu, þ.e. hafa þéttifallið

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \text{ ef } x > 0$$

en $f_\theta(x) = 0$ annars. Látum líka \bar{X}_n vera meðaltalshendinguna.

1. Notum forsendurnar að ofan

- Finnið nægjanlega reiknihendingu.
- Finnið MLE fyrir θ .
- Finnið MLE fyrir θ^2 .
- Sýnið að

$$E[\bar{X}_n] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$$

svo $U_n := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}_n$ er óbjagaður metill fyrir θ .

[Munið að $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$]

2. Notið sömu forsendur áfram og látum

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Finnið talarunur a_n og b_n þannig að

$$\frac{S_n - a_n}{b_n}$$

hafi markgildi í dreifingu (og markgildisdreifingin hafi stoð sem er ekki bara í einni tölu).

[Athugið: Hér gæti verið gott að byrja á að sýna að

$$H := X_1^2 \sim G(\alpha = 1, \beta = 2\theta^2)$$

og allt annað kemur af sjálfu sér].

3. Sömu forsendur og áður.

- (a) Er MLE fyrir θ óbjagaður?
- (b) Er MLE fyrir θ mótsagnalaus?
- (c) Er U mótsagnalaus fyrir θ ?
- (d) Er MLE fyrir θ^2 óbjagaður?
- (e) Er MLE fyrir θ^2 mótsagnalaus?
- (f) Finnið MINVUE metil fyrir θ^2 .

[Athugið: Hér þarf að rökstyðja svörin en **ekki þarf að reikna** heldur er hægt að svara hverjum lið með einni setningu (t.d. tilvísun í þekkta niðurstöðu) eða jöfnu]

4. Lítið aftur á hendingarnar og þéttiföllin að ofan.

(a) Finnið sterkasta prófið (UMP) fyrir $H_0 : \theta = \theta_0$ gegn $H_1 : \theta = \theta_1$. Gerið ráð fyrir að $\theta_1 > \theta_0 > 0$. Finnið einfalda framsetningu á prófinu og lýsið, hvernig finna má þann fasta sem með þarf til að prófið verði af tilteknu stigi.

(b) Finnið sennileikaprófið (LRT) fyrir $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

5. Látum X_1, \dots, X_n vera óháðar og einsdreifðar hendingar sem lúta Weibull dreifingu með þéttifall

$$f(x) = \theta c x^{c-1} e^{-\theta x^c} \text{ ef } x > 0$$

og $f(x) = 0$ annars. Hér er c þekktur fasti og $\theta > 0$ er stikinn.

Finnið vendihendingu Q , sýnið fram á hvernig má nota hana til að fá öryggismörk og ræðið, hvernig má gera bilið sem styst.

[Leiðbeining: Lítið á hendingar af gerðinni $\theta^k X^m$ og veljið heppileg gildi á k og m]

Aukadæmi Gerið ráð fyrir að fjölda dýra á flatareiningu sé lýst með hendingu X sem hefur líkurnar $1 - p$ á að taka gildið núll en lýtur gammadreifingu annars (líkurnar $P[X \leq x | X > 0]$ er skv. gammadreifingu). Skrifð niður jöfnur sem lýsa þessari dreifingu og finnið spanfall vægis fyrir hana. Leggið til metil fyrir væntigildi dreifingarinnar byggt á n óháðum hendingum af þessari gerð.