Háskóli Íslands	09.12.21 **Grundvöllur tölfræðinnar**	Raunvísindadeild
Laugardagur	**26. janúar 2008**	**kl 13:30-16:30**

Leyfileg hjálpargögn: Skriffæri og reiknivél. Jöfnublöðum er dreift með prófinu.		Dæmin vega jafnt.

1: Látið $X_1, \ldots, X_n$ hafa Pareto dreifingu með þéttifall $f(x) = \beta\xi^\beta / x^{\beta+1}$ ef $x > \xi$ en núll annars, þar sem $\xi,\ \beta > 0$.

(a) Sýnið að um líkindadreifingu er að ræða.

(b) Sýnið að $Y_i := lnX_i$ hefur tiltekna veldisvísisdreifingu og finnið form dreifingarinnar.

(c) Finnið sterkasta próf fyrir $H_0 : \xi = \xi_0$ gegn $H_1 : \xi = \xi_1$ (með $\xi_0 < \xi_1$).

(c) Finnið sterkasta próf fyrir $H_0 : \xi = \xi_0$ gegn $H_1 : \xi \neq \xi_0$

2. Lítum á óháðar, einsdreifðar hendingar sem lúta Poisson dreifingu, þ.e. $X_i \sim P(\theta)$, $1 \leq i \leq n$. Áhugi er á að meta $\tau = e^{-a\theta}$ þar sem a er gefinn fasti.

(a) Finnið nægjanlega reiknihendingu T og dreifingu hennar.

(b) Sýnið að T er fullkomin og ósmækkanleg.

(c) Finnið besta metil (UMVUE), $\hat{\tau}$ fyrir τ.

(d) Sýnið að $\hat{\tau}$ er mótsagnalaus (consistent).

[Leiðbeiningar: Í (c) er best að velta fyrir sér, hvaða metlar $G = g(\mathbf{X}) = h(T)$ geta verið óbjagaðir. Skrifið síðan niður veldisröð fyrir $e^{n\theta}E[h(T)]$ og aðra fyrir $e^{(n-a)\theta}$ sem veldisröð og sjáið, hvernig þessar veldisraðir þurfa að tengjast ef G á að vera óbjagaður.]

3. Ef $X_1, X_2, \dots$ er hendingaruna og $T_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ er oft áhugavert að líta á varpaðar hendingar $U_n := h(T_n)$.

Ástæða þessa er sú að aðfelludreifing (asymptotic distribution) upphaflegu summunnar, þ.e. markgildisdreifing hendinganna

$$Z_n := \sqrt{n}\,(T_n - \theta)\,,$$

er oft fall af θ þar sem θ er stikinn sem á að skoða (yfirleitt væntigildið).

Því er gjarnan leitað að falli h sem gerir aðfelludreifingu hendinganna

$$V_n := \sqrt{n}\,(U_n - h(\theta))$$

meðfærilegri en hina, helst þannig að dreifingin sé ekki fall af stikanum.

Þetta er sérstaklega áhugavert fyrir t.d. tvíkostadreifinguna $b(1,p)$ (Bernoullidreifingu) þar sem $V[X_i] = p(1-p)$ og Poisson dreifingu, $P(\lambda)$ þar sem $V[X_i] = \lambda$. Í báðum tilvikum er dreifnin fall af stikanum sem þarf að meta, en það truflar aðferðir til að finna öryggismörk.

Sýnið

(a) Ef $X_i \sim P(\lambda)$ og $U_n := h(T_n) := \sqrt{T_n}$, þá er markgildisdreifing V_n laus við $\theta = \lambda$.

(b) Ef $X_i \sim b(1,p)$ og $U_n := h(T_n) := arcsin\sqrt{T_n}$, þá er markgildisdreifing V_n laus við $\theta = p$.

[Leiðbeiningar: Aðfelludreifingu Z_n er augljós og síðan má finna aðfelludreifingu V_n út frá því.]

4: Lítið á n óháðar hendingar sem lúta veldisvísisdreifingu. Veljið á rökstuddan hátt "heppilega" vendihendingu og umsnúið henni til að fá $100(1-\alpha)\%$ öryggisbil fyrir θ.

Með "heppilegri" er átt við þá, sem er fyrirfram líkleg til að gefa stysta bilið meðal allra vendihendinga. Munið að rökstyðja valið.

Sýnið, hvernig velja má "löglega" endapunkta og rökstyðjið síðan hvernig má gera bilið sem styst.

Aukadæmi: Í stað hefðbundinnar forsendu um að niðurstaða (X) fjöldatalningar lúti tvíkostadreifingu er stundum bætt við forsendu um að líkurnar p í hverju kasti lúti beta-dreifingu. Finnið massafall, væntigildi og dreifni X ef $X|p \sim b(n,p)$ og $p \sim B(\alpha, \beta)$.

[Leiðbeiningar: Gefið ykkur það sem þarf um betadreifinguna og tvíkostadreifinguna. Athugið að auðveldara getur verið að nota V[X]=V[E[X|p]]+E[V[X|p]] heldur en massafallið þegar kemur að dreifninni (og tilsvarandi fyrir væntigildið).]